Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Часть 3

Издательство БИНОМ

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

8 класс

Часть 3

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я721
П29

*Непрерывный курс математики для дошкольников,
учащихся начальной и основной школы «Учусь учиться»*

Научный руководитель — Л. Г. Петерсон,
доктор педагогических наук, профессор,
директор Центра системно-деятельностной педагогики
«Школа 2000...» ФГАОУ ДПО АПК и ППРО,
академик Международной академии наук педагогического образования,
лауреат Премии Президента РФ в области образования за 2002 год

Петерсон Л. Г.

П 29 Алгебра: 8 класс: В 3 ч. Ч. 3 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 144 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-3229-8 (Ч. 3)
ISBN 978-5-9963-3230-4

Учебное издание ориентировано на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование у них системы прочных математических знаний, общеучебных умений, развитие личностных качеств, познавательного интереса и ценностного отношения к образованию.

Является частью целостного учебно-методического комплекса «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и основной школы (от 3 до 15 лет). Соответствует федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон. Отмечен Премией Президента РФ в области образования.

Может использоваться во всех типах школ.

Методическую поддержку по реализации УМК «Учусь учиться» осуществляет Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» ФГАОУ ДПО АПК и ППРО. Подробную информацию можно получить на сайте www.sch2000.ru.

УДК 373:51
ББК 22.1 я721

ISBN 978-5-9963-3229-8 (Ч. 3)
ISBN 978-5-9963-3230-4

Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

☐ – задания базового уровня,

☐ – более сложные задания по новым темам и темам повторения,

☐* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

*** – материал для тех, кому интересно,

■ – завершение доказательства теоремы.

Глава 5

Рациональные уравнения и неравенства

§ 1. Рациональные уравнения

1. Алгебраические дроби и их свойства

... имея возможность обратиться к математическому обоснованию, большой глупостью было бы искать какое-либо другое, – это все равно, что идти на ощупь в темноте, когда рядом стоит свеча.

Джон Арбетнот (1667–1735), английский физик

Как мы знаем, дроби возникли еще в глубокой древности в связи с практическими потребностями людей. Мы начали изучать обыкновенные дроби в начальной школе. Позже мы научились решать задачи на дроби. Так, например, при нахождении части, которую одно число составляет от другого, мы делили первое число на второе и записывали ответ в виде дроби. В наше время, например для проведения аналитической деятельности предприятия, приходится решать подобные задачи не с числовыми, а с буквенными данными. Рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1.

Ежемесячно компания тратит на оплату звонков по городу x тысяч рублей. Траты на междугородние звонки по России составляют a тысяч рублей, а на международные звонки на b тысяч рублей меньше. Какую часть потраченных на связь денег составили в этом месяце затраты на международные звонки?

Решение.

На междугородние звонки потрачено $a - b$ тыс. руб. Всего на связь было потрачено: $a + a - b + x = 2a - b + x$ тыс. руб. Найдем, какую часть составили затраты на международные звонки от суммы всех затрат на связь:

$$\frac{a-b}{2a-b+x}.$$

Ответ: $\frac{a-b}{2a-b+x}$.

В ответе к этой задаче мы получили выражение, которое является отношением двух многочленов $a - b$ и $2a - b + x$. Подобные выражения часто встречаются в математике и имеют специальное название.

***Определение* 1.** Выражение, являющееся отношением двух многочленов A и B называется **алгебраической дробью** $\frac{A}{B}$. При этом многочлен A называют **числителем** алгебраической дроби, а многочлен B – ее **знаменателем**.

Алгебраическими дробями являются, например, следующие выражения:

$$1)\ \frac{2}{3};\ 2)\ \frac{11m-27}{1};\ 3)\ \frac{x-2}{x-3};\ 4)\ \frac{ax^2-bx+1}{a^3+b-x}.$$

Где,

Алгебраическая дробь	Числитель дроби	Знаменатель дроби
$\frac{2}{3}$	2 – многочлен 0-й степени	3 – многочлен 0-й степени
$\frac{11m-27}{1}$	$11m - 27$ – многочлен 1-й степени	1 – многочлен 0-й степени
$\frac{x-2}{x-3}$	$x - 2$ – многочлен 1-й степени	$x - 3$ – многочлен 1-й степени
$\frac{ax^2-bx+1}{a^3+b-x}$	$ax^2 - bx + 1$ многочлен 2-й степени	$a^3 + b - x$– многочлен 3-й степени

Как мы видим, обыкновенная дробь $\frac{2}{3}$ и многочлен $11m - 27$ также являются алгебраическими дробями. Свойства подобных выражений и правила действий с ними мы уже изучали. А вот о последних двух алгебраических дробях этого сказать нельзя. Расширим свои знания об алгебраических дробях.

Ясно, что алгебраические дроби могут принимать различные числовые значения, в зависимости от значений, входящих в них переменных. Так, алгебраическая дробь $\frac{x-2}{x-3}$ при $x = 5$ равна $\frac{5-2}{5-3}=\frac{3}{2}=1,5$. При $x = 2$ она равна $\frac{2-2}{2-3}=\frac{0}{-1}=0$.

Если бы мы придали переменной x значение 3, то знаменатель дроби обратился бы в ноль: при $x = 3$ дробь $\frac{x-2}{x-3}$ не имеет смысла. Поэтому значение алгебраической дроби можно рассматривать только на так называемой *области определения* (или *множестве допустимых значений переменной*) – это множество, из которого исключают все значения переменных, обращающих ее знаменатель в ноль.

***Определение* 2. Областью определения** алгебраической дроби является множество тех и только тех значений переменных, при которых ее знаменатель не обращается в ноль.

Пример 1.

Найти области определения алгебраических дробей:

а) $\frac{x-2}{x-3}$; б) $\frac{x^2-2x}{x^2-3x}$; в) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$.

Решение:

а) Областью определения дроби является множество чисел x таких, что

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

б) Областью определения дроби является множество чисел x таких, что:

$$x^2-3x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ и } x \neq 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

в) Аналогично, $x^2-4x+4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

В связи с тем что значения алгебраических дробей мы рассматриваем только на их *области определения*, нам необходимо уточнить понятие равенства алгебраических дробей.

***Определение* 3. Две алгебраические дроби** будем называть **равными,** если их числовые значения совпадают при всех значениях переменных, допустимых для обеих дробей.

Работая с обыкновенными дробями, мы часто пользовались *основным свойством дроби*. Так как в алгебраической дроби переменными обозначены некоторые числа, то аналогичное свойство будет справедливо и для алгебраических дробей.

Основное свойство алгебраической дроби

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится алгебраическая дробь, равная данной.

$$\frac{A}{B}=\frac{AX}{BX},\ \text{где } X\neq 0,\ B\neq 0$$

Указанное свойство позволяет проводить преобразования алгебраических дробей: их сокращение, домножение числителя и знаменателя на один и тот же многочлен, приведение к общему знаменателю и др.

Сократим, например, алгебраические дроби из рассмотренного выше примера 1.

а) Числитель и знаменатель дроби $\frac{x-2}{x-3}$ не имеют общих множителей. Дробь несократима.

б) Проведем равносильные преобразования данной дроби и сократим ее на x, представив дробь в более простом виде:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-3x}=\frac{x(x-2)}{x(x-3)}=\frac{x-2}{x-3}.$$

Заметим, что в процессе этого преобразования область определения исходной дроби расширилась на значение $x=0$.

в) Аналогично,

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2}=\frac{x-3}{x-2}.$$

В данном случае при сокращении алгебраической дроби ее область определения не расширилась.

Прочитаем равенства, полученные в случаях *б* и *в*, справа налево. Теперь эти равенства служат примерами домножения числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же ненулевой многочлен. При этом, в отличие от сокращения алгебраических дробей, область определения дроби в случае *б* сузилась.

С помощью умножения числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же ненулевой многочлен можно привести алгебраическую дробь к новому знаменателю.

Пример 2.

Представьте дробь $\frac{7}{3r+8s}$ как дробь со знаменателем $9r^2-64s^2$.

Решение:

Приведем дробь к новому знаменателю по аналогии с обыкновенными дробями. Чтобы понять, на какой многочлен нужно домножить числитель и знаменатель дроби, разложим новый знаменатель на множители. По формуле разности квадратов:

$9r^2-64s^2=(3r+8s)(3r-8s)$. Отсюда ясно, что для получения нового знаменателя числитель и знаменатель дроби надо домножить на $3r-8s$, значит:

$$\frac{7}{3r+8s}=\frac{7(3r-8s)}{(3r+8s)(3r-8s)}=\frac{7(3r-8s)}{9r^2-64s^2}.$$

Теперь можно перейти к приведению нескольких дробей к общему знаменателю. Ясно, что общий знаменатель должен делиться на каждый из знаменателей исходных дробей, и в самом общем случае им может быть произведение знаменателей исходных дробей.

Пример 3[1].

Приведите дроби $\frac{2}{a+c}$, $\frac{3}{a-c}$ к общему знаменателю.

Решение:

Общий знаменатель дробей равен произведению: $(a+c)(a-c)$.

$$\frac{2}{a+c}=\frac{2(a-c)}{(a+c)(a-c)},\qquad \frac{3}{a-c}=\frac{3(a+c)}{(a+c)(a-c)}.$$

Часто для двух дробей можно найти более простой общий знаменатель, чем произведение их знаменателей. Чтобы избежать громоздких преобразований будем стремиться к поиску *простейшего* общего знаменателя. Для этого воспользуемся известным правилом: домножим один из знаменателей дробей на недостающие множители из знаменателей других дробей.

Пример 4.

Приведите дроби $\frac{3b-2}{7a^2+7ac}$, $\frac{2b-3}{a^2-ac}$ к общему знаменателю.

Решение:

Сначала разложим знаменатели дробей на множители:

$$7a^2+7ac=7a(a+c),\qquad a^2-ac=a(a-c)$$

Найдем простейший общий знаменатель. Для этого выпишем знаменатель одной из дробей $7a(a+c)$ и допишем недостающий множитель $a-c$ из знаменателя второй дроби. Получим, что общий знаменатель дробей равен произведению $7a(a+c)(a-c)$.

Найдем дополнительные множители для дробей, разделив общий знаменатель на каждый из знаменателей исходных дробей:

$$\frac{7a(a+c)(a-c)}{7a(a+c)}=a-c,\qquad \frac{7a(a+c)(a-c)}{a(a-c)}=7(a+c).$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{3b-2}{7a^2+7ac}=\frac{3b-2}{7a(a+c)}=\frac{(3b-2)(a-c)}{7a(a+c)(a-c)};\qquad \frac{2b-3}{a^2-ac}=\frac{2b-3}{a(a-c)}=\frac{7(2b-3)(a+c)}{7a(a+c)(a-c)}.$$

Итак, преобразования алгебраических дробей выполняются аналогично преобразованиям обыкновенных дробей, но имеют *важные особенности*:

- для проведения преобразований на множители раскладываются не только числовые множители, но и многочлены;

---

[1] Примечание: Если в условии задачи не требуется искать области определения алгебраических дробей, то вряд ли это стоит делать по собственной инициативе. В результате нахождения области определения часто получается очень громоздкий ответ, и в случае нескольких переменных он не несет никакой полезной информации. Договоримся, если в условии задачи не требуется искать области определения дробей, то делать мы этого не будем.

• преобразование алгебраической дроби может привести к изменению ее области определения (при сокращении дроби – к расширению, а при домножении – к сужению на корни многочлена X).

Таким образом, алгоритмы преобразования алгебраических дробей совпадают (с учетом указанных особенностей) с соответствующими алгоритмами преобразования обыкновенных дробей. Например, *алгоритм сокращения алгебраических дробей* выглядит следующим образом.

Алгоритм сокращения алгебраических дробей

1. Разложить числитель и знаменатель дроби на множители.
2. Найти общие множители.
3. Разделить числитель и знаменатель на общие множители.

Аналогичным образом можно вывести *алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю* (*ОЗ*).

Алгоритм приведения алгебраических дробей к ОЗ

1. Если возможно, разложить знаменатели всех дробей на множители.
2. Найти ОЗ, домножив один из знаменателей дробей на недостающие множители из знаменателей других дробей.
3. Найти дополнительные множители.
4. Привести дроби к ОЗ.

В завершение заметим, что из основного свойства алгебраической дроби непосредственно вытекают два следующих важных **свойства:**

1. Если числитель и знаменатель алгебраической дроби заменить на противоположные многочлены, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$$

2. Числитель или знаменатель алгебраической дроби можно заменить на противоположный многочлен, поставив минус перед дробью:

$$\frac{A}{B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$$

Эти свойства часто используются в самых разных преобразованиях, например при сокращении дробей. Так, мы можем записать, что

$$\frac{2x-2y}{y-x}=\frac{2(x-y)}{y-x}=-\frac{2(y-x)}{y-x}=-2.$$

1 Какую из этих дробей можно считать «лишней»? Обоснуйте свой ответ.

$$\frac{-3}{-101};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{8};\ -\frac{5}{16};\ \frac{7}{2};\ \frac{89}{100};\ \frac{a}{c};\ \frac{3}{-7};\ \frac{99}{1};\ \frac{18}{36}.$$

2 Решите задачи:

а) Скорость гоночных автомобилей достигает 400 км/ч, а скорость пикирования орла – 320 км/ч. Какую часть скорость орла составляет от скорости гоночного автомобиля?

б) Самостоятельная работа длилась n минут, а ее проверка на 5 минут меньше. Какую часть заняла самостоятельная работа с самопроверкой от всего урока (урок длится 40 минут)?

в) На занятии по карате разминка продолжалась c минут, а отработка техники – на 10 минут дольше. После этого в течение d минут ребята выполняли упражнения с партнером, затем занятие закончилось. Какая часть занятия ушла на отработку техники, если ребята приступили к разминке через 5 минут после начала занятия?

Чем похожи ответы к задачам, чем они отличаются? Как бы вы назвали две последние дроби? Сопоставьте свой вариант с определением, предложенным на стр. 3. Можно ли первую дробь назвать так же?

3 Найдите значение алгебраической дроби $\frac{2x+1}{x-4}$ при данных значениях переменной: $x = 2; -5; 104; 0,5$. Удастся ли найти значение этой алгебраической дроби при $x = 4$? Почему?

На каком множестве можно рассматривать значение алгебраической дроби? Как бы вы назвали это множество? Сопоставьте свое предположение с определением на стр. 4.

4 Найти области определения алгебраических дробей:

а) $\frac{x+1}{x-1}$ б) $\frac{x-2}{x-3}$; в) $\frac{x^2+x}{x^2-x}$; г) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$; д) $\frac{x^3-x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$; е) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+12}$.

5 а) Сократите дробь $\frac{33}{88}$, а затем приведите ее к знаменателю 24. На основании какого свойства вы выполнили данные преобразования?

б) Сократите алгебраическую дробь $\frac{ab}{bc}$, а затем приведите ее к знаменателю $3c^2$. Предположите на основании какого свойства можно выполнить эти преобразования. Сформулируйте это свойство и сравните его со свойством на стр. 5.

6 а) Сократите дроби:

$\frac{3m}{2m}$; $\frac{3c}{2c^2}$; $\frac{a(a-5)}{5a}$; $\frac{2-d}{(2-d)(2+d)}$; $\frac{1-3x}{(1-3x)^3}$.

б) Найдите область определения исходных дробей и дробей, полученных в результате сокращения. Что вы наблюдаете?

в) Можно ли обобщить результат этих наблюдений? Сформулируйте вывод об изменении области определения при сокращении дробей.

г) Изменится ли область определения алгебраической дроби после умножения ее числителя и знаменателя на один и тот же ненулевой многочлен?

д) Сравните свои выводы о влиянии преобразования алгебраической дроби на область ее определения с выводами в учебнике.

7 Сократите алгебраические дроби:

а) $-\frac{15}{3n}$; $\frac{-4m}{-16m}$; $\frac{3m}{m^2}$; $\frac{-m^3n}{n^2m}$; $\frac{7km^6n}{7^2k^2m^5n^3}$;

б) $\frac{15-3c}{3c}$; $\frac{5c-3c^2}{c}$; $\frac{5c-5a}{c-a}$; $\frac{-(a-c)}{a-c}$; $\frac{-c-a}{a+c}$; $\frac{4c-4a}{a-c}$;

в) $\frac{4a-a^2}{ab+a}$; $\frac{4b-a}{4b^2-ab}$; $\frac{b-a}{b^2-a^2}$; $\frac{a-b}{b^2-a^2}$; $\frac{a-b}{(a-b)^2}$; $\frac{a-b}{(b-a)^2}$; $\frac{(a-b)^3}{b-a}$;

г) $\frac{25-y^2}{25+5y}$; $\frac{25-y^2}{(5+y)^2}$; $\frac{x^2-16}{(x-4)^2}$; $\frac{(x-4)^2}{16-x^2}$.

8 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$; б) $\dfrac{x^2+5xy-6y^2}{x^2-4xy+3y^2}$.

9 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{x^2-15x+50}{x-5}$; в) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$;

б) $\dfrac{x+6}{x^2+14x+48}$; г) $\dfrac{x^2+x-6}{3x^2-4x-4}$.

10 Сократите алгебраическую дробь и вычислите ее значение при $x = x_0$. Расположив ответы в порядке возрастания, прочитайте слово. Как вы его понимаете?

а) $\dfrac{x^2-13x+42}{2x^2-14x}$, $x_0=4$ **А**

б) $\dfrac{-x^2+11x-30}{x^2-36}$, $x_0=9$ **П**

в) $\dfrac{3x^2-11x-34}{17-3x}$, $x_0=-5$ **З**

г) $\dfrac{-\frac{5}{3}x^2+x+12}{9-6x+x^2}$, $x_0=0{,}6$ **Т**

д) $\dfrac{x^2+13x+12}{-2x^2+x+3}$, $x_0=0{,}5$ **М**

е) $\dfrac{7x^2-2x-24}{7x^2+12x}$, $x_0=-1\frac{1}{4}$ **И**

ж) $\dfrac{-2x^2-3x+2}{4x^2-1}$, $x_0=-2$ **Т**

з) $\dfrac{-15x^2+13x-2}{10-15x}$, $x_0=\dfrac{24}{35}$ **И**

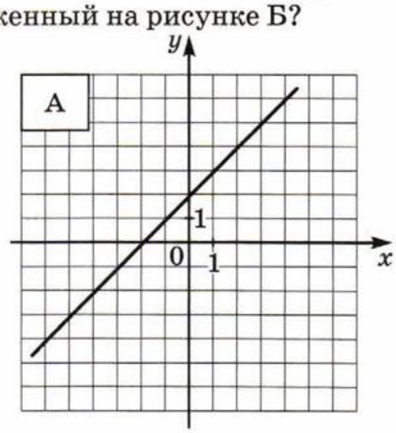
и) $\dfrac{-3x^2+6x+24}{-x^2-3x+28}$, $x_0=-1\frac{1}{6}$ **Р**

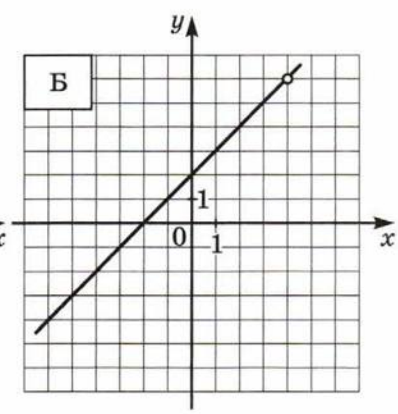
к) $\dfrac{11x-2x^2-12}{(2x-3)(x^2-16)}$, $x_0=-5\frac{3}{4}$ **О**

11 Сократите дробь:

$$\frac{x^8-y^8}{(x^4+y^4)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}.$$

12 На рисунке А изображен график функции $y = x + 2$. Чем отличается от него график, изображенный на рисунке Б?





Укажите область определения для каждой из функций.

Какой из этих графиков является графиком функции $y=\dfrac{(x+2)(x-4)}{x-4}$?

Объясните, как построить график функции $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$?

13 Постройте график функции

а) $y=\dfrac{x^2+x-30}{x-5}$; б) $y=\dfrac{x^2+3x-18}{x+6}$; в) $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

г) $y=\dfrac{x^3+27}{x+3}$; д) $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-2)(x-3)}$; е) $y=\dfrac{x^4-17x^2+16}{(x+4)(x+1)}$.

14 Приведите дробь:

а) $\dfrac{m}{n}$ к знаменателю $3n$, $-n$, mn, n^2, $2n^3$;

б) $\dfrac{a-b}{ab}$ к знаменателю ab^2, a^2b^2, $-a^2b$, $5ab^3$;

в) $\dfrac{b}{a+b}$ к знаменателю $a(a+b)$, $b^2(a+b)$, $(a-b)(a+b)$, $(a+b)^2$, a^3+b^3.

15 Приведите дроби к знаменателю x^4-y^4:

а) $\dfrac{2x+y}{x^2-y^2}$; в) $\dfrac{3x+1}{x-y}$; д) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$;

б) $\dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$; г) $\dfrac{1-3y}{x+y}$; е) $\dfrac{2x+2y}{x^2+2xy+y^2}$.

16 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{2}{y}$ и $\dfrac{x}{3y}$; б) $\dfrac{1}{xy}$ и $\dfrac{x^2}{y}$; в) $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$; г) $\dfrac{2}{x^2y}$ и $\dfrac{3}{xy^2}$.

17 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{1}{a+b}$ и $\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{b}{a+b}$ и $\dfrac{a}{a-b}$; в) $\dfrac{a}{a+b}$ и $\dfrac{b}{(a+b)^2}$; г) $\dfrac{1}{a-b}$ и $\dfrac{a}{b-a}$.

18 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{a}{a+b}$, $\dfrac{b}{a^2-b^2}$; в) $\dfrac{b}{a+b}$, $\dfrac{a-b}{a^4-b^4}$;

б) $\dfrac{a}{a+b}$, $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$; г) $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\dfrac{b}{a^3-b^3}$.

П **19** При каких значениях переменных выражения теряют смысл:

а) $6:x$; б) $\dfrac{1}{m}$; в) $-\dfrac{2}{6-2m}$; г) $\dfrac{25}{m^2-25}$; д) $-\dfrac{1}{4m^2-4m+1}$.

20 1) Приведите дробь к знаменателю 48:

а) $\dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{5}{12}$; в) $\dfrac{11}{16}$; г) $\dfrac{84}{96}$; д) $\dfrac{33}{144}$.

2) Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\dfrac{1}{12}$ и $\dfrac{5}{6}$; б) $\dfrac{2}{7}$ и $\dfrac{3}{5}$; в) $\dfrac{3}{8}$ и $\dfrac{13}{20}$; г) $\dfrac{7}{15}$ и $\dfrac{6}{25}$.

3) Сократите обыкновенную дробь:

а) $\dfrac{12}{32}$; б) $\dfrac{21}{35}$; в) $\dfrac{51}{68}$; г) $\dfrac{65}{91}$; д) $\dfrac{90}{126}$.

Какое свойство дроби позволило выполнить эти преобразования?

21 Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{1}{36}+\dfrac{7}{9}$; в) $\dfrac{17}{18}-\dfrac{5}{12}$; г) $\dfrac{21}{22}-\dfrac{3}{4}$ д) $\dfrac{7}{30}+\dfrac{5}{6}-\dfrac{4}{15}$.

22 Найдите число, обратное сумме чисел $\dfrac{4}{21}$ и $\dfrac{9}{14}$.

23 Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{1}{63}:\dfrac{1}{7}$; в) $-\dfrac{8}{30}\cdot\dfrac{15}{24}$; г) $\dfrac{12}{25}:6$ д) $\dfrac{9}{15}\cdot\dfrac{1}{81}:\dfrac{1}{5}$.

24 Найдите часть от числа, выраженную дробью:

а) $\frac{5}{7}$ от 98; б) $\frac{9}{11}$ от $\frac{22}{45}$.

25 Найдите число a по его части, выраженной дробью:

а) если $\frac{1}{3}$ числа a равна 3; б) если $\frac{5}{8}$ числа a равны $\frac{5}{32}$.

26 Какую часть первое число составляет от второго:

а) 14 от 98; б) $\frac{45}{121}$ от $\frac{9}{11}$.

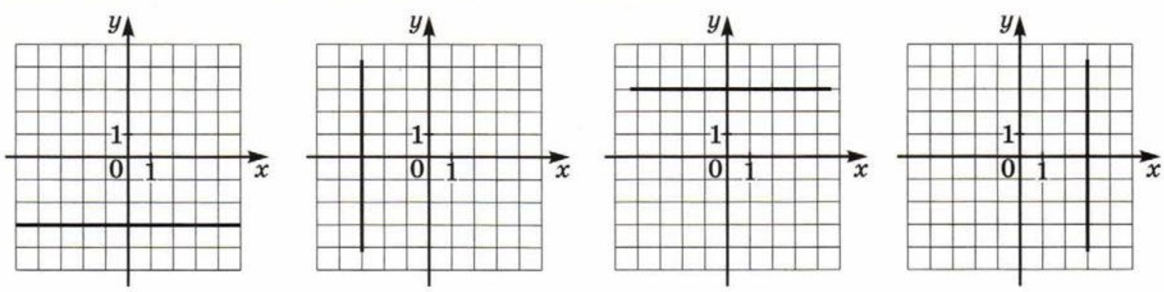
27 Найдите значение числового выражения $2\frac{1}{7}\cdot 2\frac{4}{5}-2{,}4-1\frac{1}{8}:\frac{3}{4}$.

28 Разложите многочлен на множители:

а) $16x^2 - 1$; в) $x^2 - 8x - 65$;

б) $9x + 27x^2$; г) $5x^2 - 16x + 3$.

29 На каком рисунке изображен график уравнения $y - 3 = 0$?



а) б) в) г)

30 Известно, что пара чисел (1; 3) является решением уравнения $5x + by - 8 = 0$. Найдите b.

31 Какие из точек A (–10; 0,5), B (0; 3) и C (–4; 4) принадлежат графику уравнения $x - 4y = -12$?

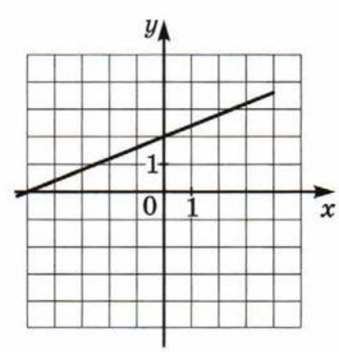
32 Постройте график уравнения:

а) $2x - y = 1$; б) $x + y - 3 = 0$.

33 Постройте график уравнения:

а) $2x + 0y = -5$; б) $0x - 3y = -9$.

34 График какого из данных уравнений изображен на рисунке:



1) $-2x - 5y + 10 = 0$; 3) $-2x + 5y + 10 = 0$;

2) $2x - 5y - 10 = 0$; 4) $2x - 5y + 10 = 0$?

35 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + ax + 3 \leqslant 0$ не имеет решений?

Д **36** Найдите значение алгебраической дроби $\frac{1-3x}{x+5}$ при данных значениях переменной: $x = 1; -3; -4{,}5; 10; \frac{1}{3}$.

37 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\dfrac{x-5}{x+3}$; в) $\dfrac{x^2-2x}{x^2+x}$; д) $\dfrac{3x^3-2x^2+13}{x^2+5x+6}$;

б) $\dfrac{x+1}{x-31}$; г) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; е) $\dfrac{x^2-8}{x^2-5x+3}$.

38 а) Сократите дробь $\dfrac{25}{75}$, а затем приведите ее к знаменателю 111.

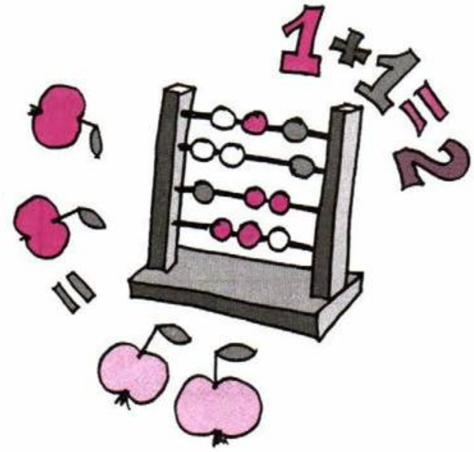
б) Сократите алгебраическую дробь $\dfrac{a^2b}{b^2c}$, а затем приведите ее к знаменателю $7a^2bc^2$.

39 Приведите дроби к знаменателю x^4-y^4:

а) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; г) $\dfrac{2y-1}{x+y}$;

б) $\dfrac{2x-y}{x^2-y^2}$; д) $\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y}$;

в) $\dfrac{x+y}{x-y}$; е) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.



40 Сократите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{a^2-9b^2}{a^2+6ab+9b^2}$; в) $\dfrac{x^2+15x+50}{x+10}$;

б) $\dfrac{x^2-2xy-3y^2}{x^2+3xy+2y^2}$; г) $\dfrac{2x^2-3x-5}{2x^2+x-1}$.

41 Постройте график функции:

а) $y=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; б) $y=\dfrac{x^4-26x^2+25}{(x-1)(x+5)}$.

42 Разложите многочлен на множители:

а) $5x-85x^2$; в) $x^2+23x+132$;

б) x^2-3; г) $2x^2-9{,}4x-3$.

43 Найдите значение числового выражения:

а) $\dfrac{5}{14}+\dfrac{6}{7}-2\dfrac{5}{28}$; б) $\dfrac{12}{77}\cdot\dfrac{55}{54}:1\dfrac{7}{18}$.

44 Какая из точек $S\,(0; -2)$, $P\,(-10; 0)$ принадлежит графику уравнения $-x+5y=10$?

45 Постройте график уравнения:

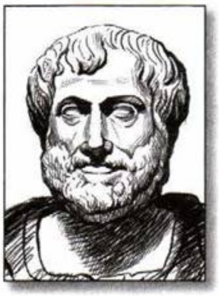
а) $x+y=2$; в) $2x-y=0$;

б) $-x-2y=6$; г) $0x-3y=-6$.

С **46*** Сократите дробь $\dfrac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$.

47* Разложите на множители a^4+4b^4.

2. Действия с алгебраическими дробями



Деяние есть живое единство теории и практики

Аристотель (384 до н.э.– 322 до н.э.),
древнегреческий философ и ученый

Разобравшись с определением и основным свойством алгебраических дробей, естественно научиться выполнять с ними арифметические действия. Мы знаем, что подставив в алгебраические дроби вместо переменных какие-либо их численные значения, мы получим обыкновенные дроби, для которых выполняются изученные ранее правила действий с дробями. Значит, те же правила будут справедливы и для алгебраических дробей.

Рассмотрим сначала сложение алгебраических дробей с *одинаковыми* знаменателями. Для сложения и вычитания алгебраических дробей $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ будут верными следующие правила:

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C};\ \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

Правило сложения (вычитания) алгебраических дробей с *одинаковыми* знаменателями

Чтобы сложить (вычесть) две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, можно записать дробь, числитель которой равен сумме (разности) числителей исходных дробей, а знаменатель равен их общему знаменателю.

Пример 1.

Выполните действия: а) $\frac{9a-5b}{4c}+\frac{4b-7a}{4c}$; б) $\frac{3x-11y}{5xy-3}-\frac{8x+3y}{5xy-3}$.

Решение:

В обоих случаях знаменатели дробей, над которыми выполняются действия, равны. Поэтому на основании правил сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями имеем:

а) $\frac{9a-5b}{4c}+\frac{4b-7a}{4c}=\frac{(9a-5b)+(4b-7a)}{4c}=\frac{9a-5b+4b-7a}{4c}=\frac{2a-b}{4c}$;

б) $\frac{3x-11y}{5xy-3}-\frac{8x+3y}{5xy-3}=\frac{(3x-11y)-(8x+3y)}{5xy-3}=\frac{3x-11y-8x-3y}{5xy-3}=\frac{-5x-14y}{5xy-3}$.

Опираясь на правило сложения и вычитания алгебраических дробей, мы можем складывать и вычитать несколько дробей.

Пример 2.

Представьте алгебраическую сумму дробей в виде дроби:

$$\frac{5a-4c}{a+b}+\frac{2b-3c}{a+b}-\frac{4c}{a+b}-\frac{6a-2c+3b}{a+b}.$$

Решение:

$$\frac{5a-4c}{a+b}+\frac{2b-3c}{a+b}-\frac{4c}{a+b}-\frac{6a-2c+3b}{a+b}=\frac{(5a-4c)+(2b-3c)-(4c)-(6a-2c+3b)}{a+b}=$$
$$=\frac{5a-4c+2b-3c-4c-6a+2c-3b}{a+b}=\frac{-a-b-9c}{a+b}$$

Теперь перейдем к сложению и вычитанию алгебраических дробей с *разными* знаменателями. Будем опираться на установленные выше правила и опыт действий с обыкновенными дробями. Ясно, что для того чтобы использовать правило сложения алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями, нужно сначала привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{CB}{DB}=\frac{AD\pm CB}{BD}$$

Как и для действий с числами, чтобы избежать лишних преобразований, лучше приводить дроби к *простейшему* общему знаменателю (ОЗ). Это делать мы уже умеем. Итак,

Алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей с *разными* знаменателями

1. Привести алгебраические дроби к простейшему ОЗ.
2. Сложить (вычесть) полученные алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 3.

Вычислите разность алгебраических дробей: $\frac{y}{2x}-\frac{1}{xy}$.

Решение:

Сначала приведем дроби к общему знаменателю, а затем выполним вычитание:

$$\frac{y^{(y}}{2x}-\frac{1^{(2}}{xy}=\frac{y^2}{2xy}-\frac{2}{2xy}=\frac{y^2-2}{2xy}$$

Перейдем к умножению и делению алгебраических дробей. Для умножения алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ будет верным следующее правило:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

Правило умножения алгебраических дробей

Чтобы умножить две алгебраические дроби, можно записать дробь, числитель которой равен произведению числителей исходных дробей, а знаменатель равен произведению знаменателей.

Если при этом в полученной дроби числитель и знаменатель имеют общие множители, отличные от нуля, то дробь можно сократить.

Пример 4.

Умножьте дроби $\frac{3x-7y}{5a-3b}$ и $\frac{5a-3b}{7abc}$.

Решение:

Умножим числители и знаменатели исходных дробей:

$$\frac{3x-7y}{5a-3b}\cdot\frac{5a-3b}{7abc}=\frac{(3x-7y)(5a-3b)}{7abc(5a-3b)}.$$

Полученную дробь можно сократить:

$$\frac{(3x-7y)(5a-3b)}{7abc(5a-3b)}=\frac{3x-7y}{7abc}.$$

Прежде чем перейти к делению алгебраических дробей, введем понятие алгебраической дроби, *обратной* данной.

***Определение* 1.** Алгебраическая дробь $\frac{B}{A}$ называется **обратной** к алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ (где $A \neq 0$, $B \neq 0$).

Очевидно, что если первая дробь обратна второй, то вторая дробь – обратна первой. Поэтому дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$ называют ***взаимно обратными***.

Заметим, что произведение взаимно обратных алгебраических дробей равно 1. Действительно,

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=\frac{AB}{BA}=1$$

Для деления алгебраических дробей $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ верно следующее правило:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}$$

Правило деления алгебраических дробей

Чтобы разделить первую дробь на вторую, можно первую дробь умножить на дробь, обратную ко второй.

Пример 5.

Разделите дробь $\frac{4x+2y}{9ab-1}$ на дробь $\frac{2x+y}{7a-5b}$.

Решение:

Чтобы разделить дроби, умножим первую дробь на дробь обратную второй, и упростим полученную дробь:

$$\frac{4x+2y}{9ab-1}:\frac{2x+y}{7a-5b}=\frac{4x+2y}{9ab-1}\cdot\frac{7a-5b}{2x+y}=\frac{2(2x+y)(7a-5b)}{(9ab-1)(2x+y)}=\frac{2(7a-5b)}{9ab-1}.$$

В завершение выясним, как возвести алгебраическую дробь в натуральную степень.

Операция возведения в натуральную степень является, по сути, многократной операцией умножения, поэтому мы можем действовать в этом случае согласно правилу умножения алгебраических дробей.

Рассмотрим дробь $\frac{A}{B}$ и возведем ее в натуральную степень n:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{B}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{B}}_{n\ \text{множителей}}=\frac{\overbrace{A\cdot\ldots\cdot A}^{}_{n\ \text{множителей}}}{\underbrace{B\cdot\ldots\cdot B}_{n\ \text{множителей}}}=\frac{A^n}{B^n}.$$

Таким образом, получаем правило возведения алгебраической дроби в степень.

Правило возведения алгебраической дроби в степень n, $n \in N$

Для того чтобы возвести алгебраическую дробь в натуральную степень n, можно возвести в эту степень числитель и знаменатель данной дроби.

Пример 6.

Запишите выражение $\left(\dfrac{4a-b}{5a+2b}\right)^2$ в виде алгебраической дроби.

Решение:

$$\left(\frac{4a-b}{5a+2b}\right)^2=\frac{(4a-b)^2}{(5a+2b)^2}=\frac{16a^2-8ab+b^2}{25a^2+20ab+4b^2}.$$

Рассмотрим пример, где выполняются сразу нескольких действий с алгебраическими дробями.

Пример 7.

Выполните действия: $\left(\dfrac{x}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+8}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right)$.

Решение:

При преобразовании таких громоздких выражений бывает полезно упрощать отдельные блоки в этих выражениях, а затем производить окончательное упрощение.

1) $$\frac{x^{(x-2}}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+8^{(1}}{(x-2)(x^2+2x+4)}-\frac{1^{(x^2+2x+4}}{x-2}=\frac{x(x-2)+x^2+8-(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$
$$=\frac{x^2-2x+x^2+8-x^2-2x-4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{x^2-4x+4}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{x-2}{x^2+2x+4};$$

2) $$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\left(-\frac{2}{x-2}\right)=\frac{x^{2(1}}{(x-2)(x+2)}+\frac{2^{(x+2}}{x-2}=\frac{x^2+2(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)};$$

3) $$\frac{x-2}{x^2+2x+4}\cdot\frac{x^2+2x+4}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+2}$.

Выражения, составленные из переменных величин и чисел при помощи арифметических операций, называют *рациональными алгебраическими выражениями*. Все рациональные выражения данного пункта содержали операцию деления на выражение с переменной, их принято называть *дробно-рациональными*. В противопоставление этому названию, рациональные выражения, не содержащие переменной в знаменателе, обычно называют *целыми рациональными* выражениями.

К **48** На какие группы можно разбить эти выражения:

$\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{2}{a}+\dfrac{5}{a}$; $\dfrac{1}{15}+\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{b}{c}+\dfrac{2}{b}$; $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{x}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известные вам правила сложения и вычитания обыкновенных дробей. Будут ли справедливы эти правила для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенными в учебнике правилами и выполните действия.

49 Выполните действия:

а) $\dfrac{2a-3b}{ab}+\dfrac{2b-2a}{ab}$; б) $\dfrac{xz+y^2}{xy-yz}-\dfrac{2x^2+y^2}{xy-yz}$.

50 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{a}+\frac{b-a}{b}$; в) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a^2-b^2}$; д) $\frac{b}{a+b}+\frac{a-b}{a^4-b^4}$;

б) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$; г) $\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a^2-b^2}$; е) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-\frac{b}{a^3-b^3}$.

51 Выполните действия:

а) $\frac{1}{x-2}+\frac{x}{x^2+4x-12}$; б) $\frac{2}{2x+3}+\frac{x}{2x^2+x-3}-\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{x-2}{x+4}-\frac{x^2}{x^2+2x-8}$.

52 Выполните действия: $\frac{yx^2+16}{(y-1)(x-4)}-\frac{16y+x^2}{xy-x-4y+4}$ и сократите получившуюся алгебраическую дробь.

53 На какие группы можно разбить эти выражения:

$\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}$; $\frac{2}{a}\cdot\frac{5}{a}$; $\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{2}$; $\frac{b}{c}\cdot\frac{2}{b}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известное вам правило умножения обыкновенных дробей. Будет ли справедливо это правило для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенным в учебнике правилом и выполните действия.

54 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{a}\cdot\frac{b+a}{b}$; в) $\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{3x}{x^2-y^2}$; д) $\frac{x^2-4x-12}{x}\cdot\frac{x}{x-6}$;

б) $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2xy}{x-y}\cdot\frac{x^3-y^3}{4x^2}$; е) $\frac{4}{2x+1}\cdot\frac{2x^2+5x+2}{2x}$.

55 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\frac{a-b}{2a+b}\right)^2$; б) $\left(\frac{x-y}{2x+3y}\right)^3$.

56 Выберите пары дробей, произведение которых равно 1:

$\frac{2}{9}$; $\frac{7+c}{c-8}$; $\frac{b}{a}$; $\frac{18}{1}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{c-8}{7+c}$.

Из выбранных пар найдите пару, составленную из обыкновенных дробей. Как называются эти обыкновенные дроби?

Предположите, как будут называться алгебраические дроби в каждой из выбранных вами пар. Сопоставьте свое предположение с определением на стр. 15.

57 Запишите алгебраическую дробь, обратную к данной:

а) $\frac{2x+3y}{5x^2-y}$; б) bc; в) $\left(\frac{x+y}{2x-y}\right)^2$.

58 На какие группы можно разбить эти выражения:

$\frac{2}{9}:\frac{5}{9}$; $\frac{2}{3}:\frac{3}{7}$; $\frac{2}{a}:\frac{5}{a}$; $\frac{4}{15}:\frac{3}{2}$; $\frac{b}{c}:\frac{2}{b}$?

Выполните действия с обыкновенными дробями. Сформулируйте известное вам правило деления обыкновенных дробей. Будет ли справедливо это правило для алгебраических дробей? Почему? Сопоставьте свой ответ с предложенным в учебнике правилом и выполните действия.

59 Выполните действия:

а) $\frac{5a-b}{a}:\frac{b-a}{a}$; в) $\frac{x-y}{xy+x}:\frac{x^2-y^2}{2x^2+xy}$; д) $\frac{x^2+5x+6}{x}:\frac{x+3}{x}$;

б) $\frac{a^2}{a+b}:\frac{a^2-ab}{a+b}$; г) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}:\frac{x^3-y^3}{x^2}$; е) $\frac{x^4-5x^2+6}{x^2}:\frac{x^2-2}{x^4}$.

60 Упростите выражение:

а) $\frac{x+12}{x^3-9x}:\left(\frac{x-3}{2x^2+5x-3}-\frac{9}{9-x^2}\right)$; б) $\left(\frac{4}{5a^2+a-4}-\frac{1+a}{9(5a-4)}\right)\cdot\frac{5a-4}{a+7}$.

61 Докажите, что выражение равно нулю при допустимых значениях переменной:

а) $\frac{6x^2-5x-6}{2x-3}+\frac{4-9x^2}{3x-2}$; б) $\frac{4x^2-4x-3}{2x+1}+\frac{9-4x^2}{2x+3}$.

62 Выполните действия:

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-c}}\cdot\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{b-a-c}{abc}.$$

63 Проанализируйте таблицу и попытайтесь составить определение дробно-рациональных и целых выражений, сопоставьте свой вариант с определениями, приведенными в учебнике.

Рациональные выражения	
Целые выражения	Дробно-рациональные выражения
$2x-7$;	$\frac{1}{x+1}$;
$\frac{1}{2}x-5+x:4$;	$\frac{2}{x}-5-3x$;
$x^2-2x+0{,}75$;	$\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}-\frac{5}{x(x-2)}$;
$\left(\frac{x-1}{5}+3\right)\cdot\frac{x+5}{2}$.	$\left(\frac{x+1}{x-4}+\frac{9}{x^2-16}\right):\frac{x}{2x+8}$.

64 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\frac{5-x}{9+x}$; б) $\frac{18+2x}{81x-x^3}$; в) $\frac{x}{x^2-x-12}$.

65 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{15a^3b^7}{65a^6b^4}$; б) $\frac{(m-7)^2}{14-2m}$; в) $\frac{16-d^2}{d^2+8d+16}$; г) $\frac{y^2-9y+20}{y^2+y-30}$; д) $\frac{5-5n+5n^2}{n^3+1}$.

66 Сократите, разложив на множители числитель и знаменатель дроби:

а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-y}$; в) $\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y}$.

67 Представьте дробь $\frac{t}{t-5}$ в виде дроби со знаменателем t^2-25.

68 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{a-7m}{2am}$ и $\dfrac{1+m}{4a}$; в) $\dfrac{1}{x^2+xq}$ и $\dfrac{x+q}{5x^2-5xq}$;

б) $\dfrac{b-1}{t-3}$ и $\dfrac{b}{6-2t}$; г) $\dfrac{n^2+n+1}{(1+n)^2}$ и $\dfrac{n}{n^2-1}$.

69 Неизвестный многочлен, обозначили буквой A.

а) $A\cdot(-2m^3)=2m^{11}-12m^9+8m^3$;

б) $A\cdot 3ab=18a^3b^3+9a^3b^2-3a^2b^3$;

в) $A\cdot(d+7)=3d+21$;

г) $A\cdot(t+5)=t^2-25$;

д) $A\cdot(2z+5)=20z^2+100z+125$.

Найдите многочлен A.

70 Русский инженер Глеб Котельников изобрел ранцевый парашют в XX веке. Первая конструкция парашюта была разработана итальянским ученым Леонардо да Винчи на несколько веков раньше. Выполнив деление с остатком 79 551 на 647, вы сможете узнать, сколько лет разделяют эти изобретения. Для этого выпишите из полученного при делении «столбика» второе неполное делимое (примерный год изобретения парашюта Леонардо да Винчи) и третье неполное делимое (год изобретения парашюта Котельниковым).

71 Найдите остаток при делении:

а) 109 на 9; б) 200 на18; в) 360 на 12; г) 190 на 15; д) 23 на 25.

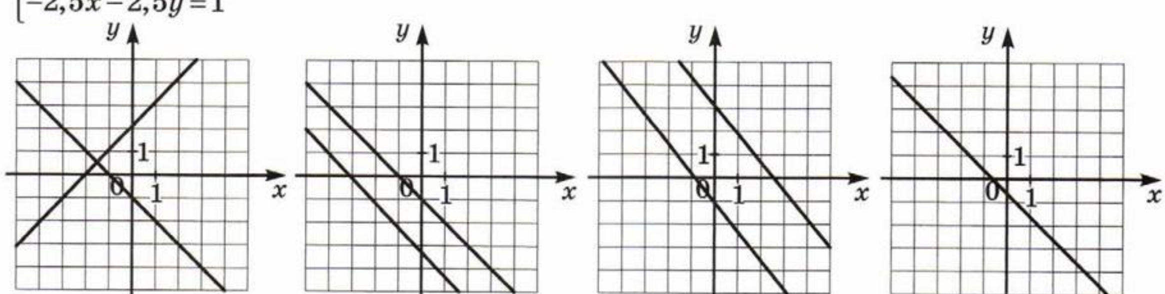
72 Представьте неправильные дроби в виде смешанных чисел:

а) $\dfrac{11}{6}$; б) $\dfrac{63}{8}$; в) $\dfrac{93}{73}$; г) $\dfrac{256}{15}$; д) $\dfrac{100}{2}$.

73 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases}2x+y=4\\x-y=2\end{cases}$; б) $\begin{cases}0,5x-y=-3,5\\-3x-y=0\end{cases}$; в) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+y=-4\\-\dfrac{1}{3}x+y=-2\end{cases}$.

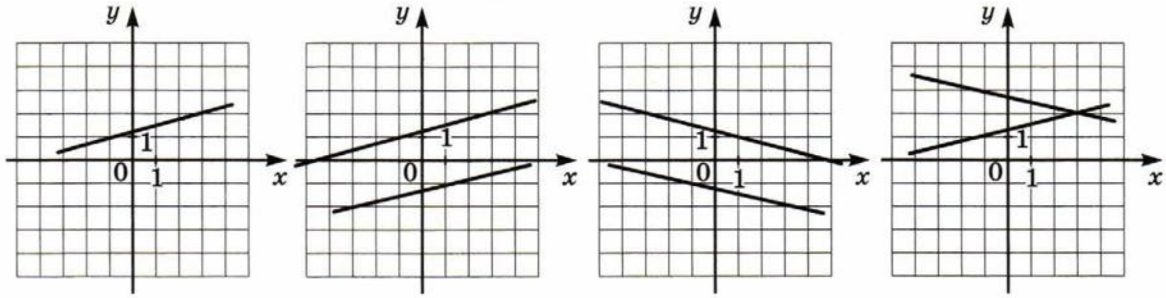
74 Укажите рисунок, на котором изображено графическое решение системы уравнений $\begin{cases}5x+5y=-2\\-2,5x-2,5y=1\end{cases}$.



а) б) в) г)

75 Укажите рисунок, на котором изображено графическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-12y=-15 \\ x-4y=5 \end{cases}$$



а) б) в) г)

76 Решите систему, используя теорему о целочисленных точках графика уравнения для решения систем:

$$\begin{cases} 2x-5y=0 \\ x+5y=15 \end{cases}.$$

Д **77** Выполните действия:

а) $\dfrac{2a^2+3b^2}{a+b}+\dfrac{b^2-6a^2}{a+b}$; б) $\dfrac{xy+2y^2}{xy+yz}-\dfrac{xy-y^2}{xy+yz}$.

78 Выполните действия:

а) $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}$; б) $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}$; в) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^4-b^4}$; г) $\dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}-\dfrac{b^2}{a^3-b^3}$.

79 Выполните умножение:

а) $\dfrac{a+b}{a^2}\cdot\dfrac{b-a}{b^2}$; б) $\dfrac{b}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{a+2b}$; в) $\dfrac{x-y}{3xy}\cdot\dfrac{5y^2}{x^2-y^2}$; г) $\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{6xy}$.

80 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\dfrac{a+b}{3a-b}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{x+y}{5x+y}\right)^3$.

81 Запишите алгебраическую дробь, обратную к данной:

а) $\dfrac{x-3y}{2x+y^2}$; б) $x+y$; в) $\left(\dfrac{x-y}{x+3y}\right)^2$.

82 Выполните деление:

а) $\dfrac{3a+b}{b^2}:\dfrac{b+2a}{b}$; б) $\dfrac{ab}{a-b}:\dfrac{3a^2+ab}{ab-b^2}$; в) $\dfrac{x+y}{2xy-x}:\dfrac{x^2-y^2}{2y^2-y}$; г) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}:\dfrac{x^3+y^3}{xy}$.

83 Выполните действия: $\dfrac{x^3}{2x^2+x-3}:\dfrac{x^2}{x-1}\cdot(2x+3)$.

84 Выполните действия:

$$\left(\frac{a^6+b^6}{a^4-b^4}+\frac{a^2b^4-a^4b^2}{a^4+b^4-2a^2b^2}\right):(a-b)-b.$$

85 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\frac{x}{x-3}$; б) $\frac{5}{15x^2+3x}$; в) $\frac{4+x}{x^2-2x-24}$.

86 Сократите алгебраические дроби:

а) $\frac{14s^5r^7p^5q}{98s^7r^5p}$; б) $\frac{(8+a)^2}{24+3a}$; в) $\frac{m^2-6m+9}{m^2-9}$; г) $\frac{t^2+t-110}{t^2-12t+20}$; д) $\frac{3+3b+3b^2}{b^3-1}$.

87 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{s-1}{5s}$ и $\frac{5+d}{2sd}$; в) $\frac{2}{m^2-mp}$ и $\frac{p}{9m^2+9mp}$;

б) $\frac{1}{5-10k}$ и $\frac{k}{2k-1}$; г) $\frac{a^2-a+4}{(a-2)^2}$ и $\frac{a}{a^2-4}$.

88 Найдите решение системы графическим способом:

а) $\begin{cases}5{,}5x+y=6\\-x+y=-7\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-y=5\\-0{,}4x+0{,}2y=-1\end{cases}$; в) $\begin{cases}0{,}25x+0{,}25y=0{,}5\\3x+3y=-3\end{cases}$.

C **89*** Можно ли разделить поровну 13 одинаковых прямоугольных пирожных среди шести ребят так, чтобы каждое пирожное либо не разрезалось вовсе, либо разрезалось на две равные части, либо разрезалось на три равные части?

90* Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.

3.* Алгебраические дроби и деление многочленов

За легкое дело берись как за трудное, а за трудное – как за легкое. В первом случае, дабы уверенность не перешла в беспечность; во втором – неуверенность в робость.

Грасиан-и-Моралес Бальтасар (1601–1658),
испанский писатель и философ

В этом пункте мы будем рассматривать многочлены *только от одной переменной*. Эту переменную будем обозначать x, а многочлены от одной переменной будем обозначать как $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ...

Алгебраические дроби, с которыми мы познакомились в пункте 5.1.1, представляют собой отношение двух многочленов A и B, стоящих в числителе и знаменателе дроби. Иногда это отношение может быть равно некоторому многочлену C. Например, алгебраическая дробь $\frac{x^4-1}{x^2-1}$ при $x \neq \pm 1$ равна многочлену x^2+1. В таких случаях, аналогично делимости целых чисел, говорят, что многочлен A *делится* на многочлен B, где $B \neq 0$.

Но чаще всего многочлен A не делится на многочлен B. В этом случае для многочленов, как и для целых чисел, вводится понятие *деления с остатком*.

Мы уже изучали в 7-м классе операции сложения, вычитания и умножения многочленов. В этом пункте мы познакомимся с операцией деления многочленов и ее применением для преобразования алгебраических дробей.

***Определение* 1. Разделить многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$ с остатком** при $B(x) \neq 0$, значит, представить многочлен $A(x)$ в виде:

$$A(x) = B(x) \times C(x) + R(x),$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ или $R(x) = 0$.

В данном равенстве многочлен $A(x)$ называют **делимым**, $B(x)$ – **делителем**, $C(x)$ – **неполным частным**, а $R(x)$ – **остатком** от деления многочленов $A(x)$ на $B(x)$. Значит, разделить $A(x)$ на $B(x)$ – это значит, фактически, указать частное $C(x)$ и остаток $R(x)$.

Например, чтобы разделить многочлен $x^4 + 1$ на многочлен $x^2 - 1$ с остатком, достаточно составить равенство:

$$x^4 + 1 = (x^4 - 1) + 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 2$$

Здесь $C(x) = x^2 + 1$ – неполное частное, $R(x) = 2$ – остаток, причем степень остатка меньше степени делителя: $0 < 2$. Таким образом, мы получили требуемое представление многочлена $x^4 + 1$, а значит, произвели его деление с остатком на многочлен $x^2 - 1$.

Примечание. В случае $R(x) = 0$, наше определение означает, что многочлен $A(x)$ **делится** на многочлен $B(x)$, где $B(x) \neq 0$.

Разберем несколько примеров, которые помогут нам вывести алгоритм деления многочленов. Вначале рассмотрим более простой случай деления – деление многочлена на одночлен. Разделим с остатком, например многочлен $6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2$ на одночлен $2x^3$.

Чтобы выполнить деление, нам надо представить делимое в виде:

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot C(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $R(x)$ – многочлен степени меньше 3. Сгруппируем члены многочлена, степень которых больше или равна 3:

$$(6x^7 - 2x^6 + 4x^5) + x^2 + 2$$

Вынося за скобки $2x^3$, получим:

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot (3x^4 - x^3 + 2x^2) + x^2 + 2.$$

Значит, неполное частное $C(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2$, а остаток $R(x) = x^2 + 2$, где степень остатка меньше степени делителя: $2 < 3$.

При решении примера 1 мы использовали способ подбора. Как и любой подбор, он не является общим способом. Вместе с тем полученный результат мы можем использовать для вывода алгоритма деления с остатком любых многочленов. Для этого будем действовать аналогично делению целых чисел «в столбик»:

Деление чисел

$$\begin{array}{r|l}
-\,6241 & 2 \\ \cline{2-2}
\underline{6} & 3120 \\
-\,2 & \\
\underline{2} & \\
-\,4 & \\
\underline{4} & \\
1 \text{ (ост.)} &
\end{array}$$

$$6241 = 2 \cdot 3120 + 1.$$

Деление многочлена на одночлен

$$\begin{array}{r|l}
-\,6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 & 2x^3 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^7\phantom{{} - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2}} & 3x^4 - x^3 + 2x^2 = C(x) \\
-\,{-2x^6} + 4x^5 + x^2 + 2 & \\
\underline{-2x^6\phantom{{} + 4x^5 + x^2 + 2}} & \\
-\,{+4x^5} + x^2 + 2 & \\
\underline{+4x^5\phantom{{} + x^2 + 2}} & \\
+x^2 + 2 = R(x) &
\end{array}$$

$$6x^7 - 2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2 = 2x^3 \cdot (3x^4 - x^3 + 2x^2) + x^2 + 2.$$

Таким образом, мы получили тот же самый результат. Вначале мы определили, на какой одночлен надо умножить $2x^3$, чтобы получить старший член делимого $6x^7$, нашли первый член частного $3x^4$. Вычли выражение $6x^7$ из делимого и выписали полученную разность: $-2x^6 + 4x^5 + x^2 + 2$. А затем еще 2 раза последовательно применили ту же самую процедуру к полученным после вычитания выражениям.

Теперь рассмотрим случай деления с остатком двух многочленов, например многочлена $4x^3 + x - 3 + x^4$ на многочлен $x - 2$. Запишем многочлены в стандартном виде. По определению, чтобы выполнить указанное деление, нам надо представить многочлен $x^4 - 4x^3 + x - 3$ в виде:

$$x^4 - 4x^3 + x - 3 = (x - 2)\,C(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $R(x)$ – многочлен, степень которого меньше степени двучлена $x - 2$, то есть меньше 1.

Как и в первом примере, разделим многочлены «в столбик» по аналогии с целыми числами:

$$\begin{array}{r|l}
-\,15013 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{12} & 1251 \\
-\,30 & \\
\underline{24} & \\
-\,61 & \\
\underline{60} & \\
-\,13 & \\
\underline{12} & \\
1\ (\text{ост.}) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 4x^3 \qquad + x - 3 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3} & x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = C(x) \\
-\,-2x^3 \qquad + x - 3 & \\
\underline{-2x^3 + 4x^2} & \\
-\,-4x^2 + x - 3 & \\
\underline{-4x^2 + 8x} & \\
-\,-7x - 3 & \\
\underline{-7x + 14} & \\
-17 = R(x) &
\end{array}$$

$15013 = 12 \cdot 1251 + 1$; $\qquad x^4 - 4x^3 + x - 3 = (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 7) - 17.$

Будем подбирать каждый член частного так, чтобы при умножении его на делитель получать старший член делимого. Тогда на каждом шаге степень делимого будет последовательно уменьшаться.

Первый член частного равен $x^4 : x = x^3$. Умножим x^3 на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-2x^3 + x - 3$.

Второй член частного равен $-2x^3 : x = -2x^2$. Умножим $-2x^2$ на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-4x^2 + x - 3$.

Третий член частного равен $-4x^2 : x = -4x$. Умножим $-4x$ на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим $-7x - 3$.

Четвертый член частного равен $-7x : x = -7$. Умножим -7 на $x - 2$ и результат вычтем из делимого, получим в остатке многочлен -17 степени 0, $0 < 1$. Деление закончено.

Значит, $C(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$, $R(x) = -17$. Этот результат можно проверить непосредственным преобразованием правой части.

$(x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 7) - 17 = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 7x - 2x^3 + 4x^2 + 8x + 14 - 17 =$
$= x^4 - 4x^3 + x - 3.$

Итак, для того чтобы выполнить деление многочленов мы сначала приводим их к стандартному виду, а затем выполняем деление многочленов «в столбик» аналогично делению чисел. При этом неполное частное и остаток при делении многочленов «в столбик» находятся на тех местах, на которых находятся неполное частное и остаток при обычном делении чисел «в столбик».

В итоге, мы можем записать следующий алгоритм.

Алгоритм деления многочлена на многочлен

1. Записать оба многочлена в стандартном виде.

2. Записать делимое и делитель как при делении чисел «в столбик».

3. Найти первый член частного: одночлен, при умножении которого на старший член делителя получается старший член делимого.

4. Умножить найденный член частного на делитель и подписать под делимым так, чтобы одночлены одинаковых степеней стояли друг под другом.

5. Вычесть из делителя найденное произведение.

6. Если степень полученной разности меньше степени делителя, то закончить деление и перейти к пункту 8.

7. Если степень разности больше или равна степени делителя, то считая разность делимым, найти следующий член частного и повторить пункты 4–6.

8. Записать результат деления многочленов.

Операция деления многочленов «в столбик» часто применяется при работе с алгебраическими дробями. Так, деление без остатка многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ может использоваться для сокращения дроби $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

Пример 1.

Сократите дробь $\dfrac{4x^3-2x^2+6x+4}{x^2-x+2}$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} -\,4x^3-2x^2+6x+4 & \underline{\,x^2-x+2\,} \\ \underline{4x^3-4x^2+8x\phantom{{}+4}} & 4x^2+2=C(x) \\ -\,2x^2-2x+4 & \\ \underline{2x^2-2x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит, $\dfrac{4x^3-2x^2+6x+4}{x^2-x+2}=4x+2$.

Чтобы понять, как при работе с алгебраическими дробями используется деление с остатком, введем следующее определение.

***Определение* 2.** Алгебраическая дробь $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, где степень числителя равна m, а степень знаменателя n, называется **правильной**, если $m<n$, и **неправильной**, если $m \geqslant n$ $(m, n \in N_0)$.

Например,

а) дробь $\dfrac{x^2-3x+5}{x^3+6x+1}$ – правильная, так как $m=2$, $n=3$ и $2<3$;

б) дробь $\dfrac{x^6-2x^3+x}{x^4-x^2+1}$ – неправильная, так как $m=6$, $n=4$ и $6>4$;

в) дробь $\dfrac{x^3-3x-1}{\left(x^2+x\right)^2-\left(x^2-x\right)^2}$ – неправильная, так как $m=3$, $n=3$ (знаменатель преобразуется к виду $x^4+2x^3+x^2-x^4+2x^3-x^2=4x^3$) и $3=3$.

Легко заметить, что введенное нами определение напоминает определение правильной и неправильной числовой дроби.

Как мы помним, числовая неправильная дробь может быть представлена в виде смешанного числа (суммы целого числа и правильной дроби, где знак «+» обычно опускается), например, $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$.

Чтобы представить неправильную дробь в виде смешанного числа, мы выполняли деление с остатком числителя на знаменатель. Так, в приведенном примере при делении с остатком 7 на 3 получается $7 = 3 \cdot 2 + 1$, откуда следует вывод, что $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$. Данное преобразование мы называли *выделением целой части* из неправильной дроби.

Аналогичное преобразование можно выполнить и для алгебраической дроби, исходя из формулы ее деления с остатком:

$$A(x)=B(x)\cdot C(x)+R(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A(x)}{B(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{B(x)}, \text{ где } B(x)\neq 0.$$

Следовательно, любую неправильную алгебраическую дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной алгебраической дроби, то есть *выделить из нее целую часть.*

***Определение* 3. Выделить целую часть** из алгебраической дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$, где $B(x)\neq 0$, значит представить ее в виде суммы некоторого многочлена $C(x)$ и правильной дроби $\frac{R(x)}{B(x)}$ т. е.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{B(x)}, \text{ где } B(x)\neq 0.$$

Значит, **чтобы выделить из алгебраической дроби целую часть, нужно многочлен, стоящий в числителе, разделить с остатком на многочлен, стоящий в знаменателе.** Тогда неполное частное будет целой частью алгебраической дроби, а остаток – числителем дробной части.

Вернемся к рассмотренному нами выше примеру деления многочленов. При делении многочлена x^4-4x^3+x-3 на $x-2$ мы получили неполное частное $C(x)=x^3-2x^2-4x-7$ и остаток $R(x)=-17$, значит,

$$\frac{x^4-4x^3+x-3}{x-2}=x^3-2x^2-4x-7-\frac{17}{x-2}.$$

Выделение целой части из алгебраической дроби бывает весьма полезным при решении самых разнообразных задач.

Пример 2.

При каких значениях k, где $k \in \boldsymbol{Z}$ алгебраическая дробь $\frac{k^3+k^2-2k+7}{k-1}$ является целым числом?

Решение:

Выделим целую часть данной дроби при $k\neq 1$. Для этого разделим «в столбик» многочлен k^3+k^2-2k+7 на многочлен $k-1$.

$$\begin{array}{r|l}
-\,k^3+k^2-2k+7 & k-1 \\ \cline{2-2}
\underline{k^3-k^2} & k^2+2k=C(x) \\
-\,2k^2-2k+7 & \\
\underline{2k^2-2k} & \\
7=R(x) &
\end{array}$$

Значит, $\frac{k^3+k^2-2k+7}{k-1}=k^2+2k+\frac{7}{k-1}$.

При всех целых значениях k выражение $k^2 + 2k$ будет целым числом. Значит, для того чтобы исходная алгебраическая дробь была целым числом необходимо, чтобы $\frac{7}{k-1}$ было целым числом. Это возможно только в тех случаях, когда знаменатель является делителем числа 7.

Делителями 7 являются четыре целых числа: –1; 1; –7; 7. Значит, исходная алгебраическая дробь будет целым числом только при следующих значениях k:

$k-1=-1 \Leftrightarrow k=0$ $\qquad$ $k-1=-7 \Leftrightarrow k=-6$

$k-1=1 \Leftrightarrow k=2$ $\qquad$ $k-1=7 \Leftrightarrow k=8$

Все полученные значения k принадлежат области определения данной дроби $k \neq 1$. Значит, они и составляют множество решений нашей задачи.

Ответ: $\{-6; 0; 2; 8\}$.

К **91** Выполните деление многозначных чисел:

а) 9984 : 39; $\qquad$ б) 56095 : 123.

Проверьте результат с помощью умножения. Какие случаи деления вы вспомнили?

92 Выполните вычитание многочленов «в столбик»:

а) $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ и $2x^3 - x^2$;

б) $4x^2 + 4x - 3$ и $4x^2 - 2x$.

Сравните степени уменьшаемого многочлена и многочлена, полученного в результате вычитания.

93 Выполните умножение многочлена $x^2 + 2x + 3$ на многочлен $2x - 1$.

Пользуясь результатами выполнения этого задания, ответьте на вопросы:

1) На какой многочлен нужно умножить многочлен $2x - 1$, чтобы получить многочлен $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$?

2) Какой результат получится после сокращения дроби $\frac{2x^3+3x^2+4x-3}{x^2+2x+3}$?

3) Какой результат получится при делении многочлена $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ на многочлен $2x - 1$?

4) Предложите способ выполнения деления многочлена $2x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ на многочлен $2x - 1$.

94 Выполните деление многочленов и проведите проверку с помощью умножения.

а) Разделите многочлен $3x^6 + 12x^4 - 21$ на одночлен $3x^3$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на однозначное.

б) Разделите многочлен $18x^2 - 27x + 10$ на двучлен $3x - 2$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на многозначное.

в) Разделите многочлен $x^5 + 6x^4 - 19x^3 + x^2 + 8x + 4$ на многочлен $x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ по аналогии с делением «в столбик» многозначного числа на многозначное.

Пользуясь результатами выполнения деления, сформулируйте алгоритм деления многочлена на многочлен и сравните его с алгоритмом на стр.24.

95 Замените дробь равным ей целым выражением, разделив ее числитель на знаменатель:

а) $\frac{x^3-13x-12}{x+1}$; в) $\frac{x^3-13x-12}{x-4}$; д) $\frac{x^3-13x-12}{x^2-3x-4}$;

б) $\frac{x^3-13x-12}{x+3}$; г) $\frac{x^3-13x-12}{x^2-x-12}$; е) $\frac{x^3-13x-12}{x^2+4x+3}$.

96 Найдите остаток от деления многочлена $3x^4+13x^3+17x^2+6x+5$ на $x+2$.

97 Найдите остаток от деления многочлена x^3+x^2 на многочлен x^2-1.

98 На какие подмножества можно разбить дроби из множества:

$$A=\left\{\frac{5}{6};\ \frac{7}{3};\ \frac{8}{99};\ \frac{44}{21};\ \frac{16}{2}\right\}.$$

Каким определением вы воспользовались?

Можно ли разбить дроби из множества B аналогичным способом?

$$B=\left\{\frac{5a}{a^4-1};\ \frac{b-1}{b^2};\ \frac{x-3}{x^2+4};\ \frac{d^8}{8};\ \frac{n-4}{(n+4)^2}\right\}?$$

Проверьте свою версию, прочитав определение на стр. 24.

99 Выделите целую часть из алгебраической дроби:

а) $\frac{3x^4+13x^3+17x^2+6x+5}{x+2}$; б) $\frac{x^3+x^2}{x^2-1}$.

Результаты выполнения каких предыдущих заданий помогут вам сделать это быстрее?

100 Выделите целую часть из алгебраической дроби:

а) $\frac{3x-1}{x-2}$; б) $\frac{4x^2+x-6}{x+5}$; в) $\frac{y^3+0,5y^2}{2y^2+y-4}$.

П **101** Выполните действия:

а) $\frac{3m+2p}{5a}+\frac{8p-13m}{5a}$; в) $\frac{x-y}{xy^2}-\frac{x-y}{x^2y}$;

б) $\frac{b+1}{b}-\frac{3b+2}{3b}$; г) $\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{a^2-2a}$.

102 Выполните действия:

а) $\frac{9a^3}{6b^2}\cdot\frac{4b^3}{3a^4}$; в) $\frac{d^2-q^2}{3x-3z}:\frac{dq+q^2}{x-z}$;

б) $\frac{c-5}{c}\cdot\frac{7c^2}{c^2-25}$; г) $\frac{p^2-2pt+t^2}{p^3+t^3}:\frac{p-t}{p^2-pt+t^2}$.

103 Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\frac{k^2}{s^3}\right)^5$; б) $\left(-\frac{4dt^3}{h^2}\right)^3$; в) $\left(\frac{2ax^4}{v^3}\right)^3\cdot\left(-\frac{v^3}{5a^4x}\right)^2$.

104 Выполните действия: $\frac{3(a-3)}{a+3}+\left(\frac{5a}{a+3}-\frac{14a}{a^2+6a+9}\right):\frac{5a+1}{a^2-9}$.

105 Выполните действия:

а) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2}{x-y}$; б) $\frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y}\cdot\frac{1}{x}$.

106 Решите уравнение:

а) $\frac{x-1}{2}-\frac{4+2x}{3}=0$; б) $\frac{x}{15}-\frac{1}{5}=\frac{x-1}{25}$.

107 Найдите неизвестный член пропорции:

а) $5 : x = 7 : 21$; б) $x : 3,3 = 0,2 : 0,6$; в) $\frac{5}{6}=\frac{2x}{3}$; г) $\frac{5x}{6}=\frac{x+1}{3}$.

В каком случае вы использовали основное свойство пропорции? Сформулируйте это свойство.

108 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=0,5 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x-4y=-5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2(3x-y)+5=4(0,5x+y) \\ 19y+8(0,15x-1)=-1,8x \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{10}=0,1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} \frac{x-y}{6}=1 \\ \frac{x+1}{3}-\frac{1-2y}{4}=-\frac{5}{12} \end{cases}$; е) $\begin{cases} \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{2} \\ \frac{3x-y}{5}=\frac{5x-4y}{6} \end{cases}$.

Д **109** Замените дробь равным ей целым выражением:

а) $\frac{x^3-11x^2+10}{x-1}$; в) $\frac{x^3-10x+3}{x-3}$; д) $\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$;

б) $\frac{x^3-5x-2}{x+2}$; г) $\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2+x+1}$; е) $\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}$.

110 Найдите остаток от деления многочлена $x^4-x^3+x^2-x+5$ на $x+3$.

111 Найдите остаток от деления многочлена $2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$ на $x-2$.

112 Найдите остаток от деления многочлена $3x^3+2x^2+x$ на многочлен x^2-1.

113 Выделите целую часть алгебраической дроби:

а) $\frac{3x+2}{x-3}$; б) $\frac{x^3-2x^2+1}{x^2+x}$.

114 Выполните действия: $\left(\frac{5d}{d+1}-\frac{3d}{d^2+2d+1}\right):\frac{5d+2}{d^2-1}+\frac{d-1}{d+1}$.

115 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-4=6(y-2,5x) \\ 13x-5(x+1)=-y-0,2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x+y}{6}-\frac{x}{5}=0,1 \\ \frac{y}{3}+\frac{x-y}{2}=-0,5 \end{cases}$.

116 Решите уравнение: $\frac{x-3}{4}+\frac{x}{22}=\frac{x+3}{8}$.

С **117*** В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

118* На доске записаны числа 4, 14, 24, ..., 94, 104. Можно ли стереть одно число, затем из оставшихся еще два, затем еще три и, наконец, еще четыре числа так, чтобы после каждого вычеркивания сумма оставшихся чисел делилась на одиннадцать?

4. Дробно-рациональные уравнения

Тот, кто ищет методы, не имея в виду какой-либо конкретной задачи, в большинстве случаев терпит неудачу.

Дэвид Гильберт (1862–1943),
немецкий математик

Теория алгебраических дробей, с которой мы познакомились в предыдущих пунктах, расширяет наши возможности при решении практических задач. В данном пункте мы научимся решать задачи, математические модели которых содержат алгебраические дроби. Раньше такие задачи нам уже встречались, но решить мы могли лишь некоторые из них и достаточно громоздкими способами – методом перебора, методом проб и ошибок. Теперь мы можем вывести удобный общий алгоритм их решения.

Рассмотрим вначале следующую задачу.

Задача.

Длина стороны первого квадрата на 3 см больше, чем длина стороны второго квадрата. Если площадь первого квадрата уменьшить на 7 см^2 и разделить на длину стороны второго квадрата, то результат окажется на 12 см больше, чем результат от деления площади некоторой фигуры, равной 2 см^2, на длину стороны второго квадрата. Найти площадь второго квадрата.

Решение:

Пусть длина стороны первого квадрата равна x, тогда длина стороны второго квадрата равна $x - 3$. Так как обе длины – величины положительные, то $x > 3$.

Математическая модель задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{x-3} = \dfrac{2}{x-3} + 12 \\ x > 3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{(x-3)^2 = ?}$$

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, нам надо найти корни полученного уравнения. Общего способа его решения у нас нет, так как оно содержит дробно-рациональные выражения. Вместе с тем такие уравнения встречаются достаточно часто, поэтому нам надо научиться их решать.

Сначала введем определение уравнений нового типа.

***Определение* 1.** Уравнение, одна из частей которого является целым рациональным выражением, а другая дробно-рациональным или обе части которого являются дробно-рациональными выражениями, называется **дробно-рациональным уравнением.**

Например, дробно-рациональными являются следующие уравнения:

$$\frac{x-2}{x+3} = 0; \qquad 5y = \frac{2+4y}{3y-7} + 14; \qquad \frac{6x+5y}{11xy} = \frac{xy}{2x+12y}.$$

При этом в первых двух уравнениях используется только одна переменная. Поэтому их называют *дробно-рациональными уравнениями с одним неизвестным*. Именно такие уравнения мы и рассмотрим в данном пункте.

Уравнение нового типа отличается от известных нам уравнений – в нем содержатся дробно-рациональные выражения, которые теряют смысл при значении неизвестного, обращающего знаменатель в ноль. Поэтому, решая дробно-рациональное уравнение, нужно следить за тем, чтобы среди его корней таких значений не оказалось. Для построения нового алгоритма нам необходимо ввести понятие *области допустимых значений* уравнения.

***Определение* 2. Областью допустимых значений** (ОДЗ) уравнения называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл все выражения, входящие в уравнение.

Из этого определения следует, что для нахождения ОДЗ дробно-рационального уравнения, надо найти пересечение областей определения всех алгебраических дробей, стоящих в его левой и правой частях. Так, ОДЗ уравнения $\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12$, полученного в задаче, представляет собой множество всех чисел, не равных 3: $x \neq 3$.

Чтобы понять, как решать уравнения нового типа, вспомним, как решаются уже известные нам аналогичные уравнения с дробями, знаменатели которых не содержали неизвестного, например:

$$\frac{x-7^{(3}}{6}=\frac{2^{(6}}{3}+\frac{2x^{(2}}{9} \Leftrightarrow \frac{3(x-7)}{18}=\frac{12}{18}+\frac{4x}{18} \Leftrightarrow 3x-21=12+4x \Leftrightarrow x=-33.$$

Мы умножили обе части уравнения на наименьший общий знаменатель данных дробей, равный 18, привели уравнение к целым коэффициентам, а затем нашли x.

Попробуем теперь решить уравнение нового типа, применяя тот же способ *на области его допустимых значений*: $x \neq 3$.

Приведем все слагаемые к общему знаменателю $x - 3$:

$$\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12 \Leftrightarrow \frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2+12(x-3)}{x-3}.$$

Домножая обе части уравнения на общий знаменатель, получим:

$$x^2-7=2+12(x-3) \Leftrightarrow x^2-12x+27=0.$$

Найдем корни квадратного уравнения по теореме, обратной теореме Виета:

$$x = 3 \text{ или } x = 9.$$

Проверим, что полученные корни принадлежат ОДЗ уравнения ($x \neq 3$). Корень $x = 3$ не принадлежит ОДЗ и его нужно исключить из множества решений. Такие корни называют **посторонними корнями**. Корень $x = 9$ принадлежит ОДЗ. Именно он и будет решением исходного уравнения.

Мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

1. Найти ОДЗ уравнения.
2. Привести обе части уравнения к общему знаменателю.
3. Домножить обе части уравнения на общий знаменатель.
4. Найти корни полученного уравнения.
5. Проверить, принадлежат ли найденные корни ОДЗ.
6. Записать в ответе те из найденных корней, которые принадлежат ОДЗ.

Теперь вернемся к задаче, рассмотренной в начале пункта. Чтобы завершить ее решение, нам осталось проверить, что найденный нами корень 9 удовлетворяет второму неравенству из математической модели: $9 > 3$ (истинно).

Найдем требуемую в условии задачи величину: $(x-3)^2=(9-3)^2=36$.

Ответ: площадь второго квадрата равна 36 см^2.

Для решения задачи мы вывели общий алгоритм решения дробно-рациональных уравнений, основанный на преобразовании дробно-рациональных выражений к целым на ОДЗ уравнения. Однако в ряде случаев дробно-рациональное уравнение удобнее решать, пользуясь *условием равенства дроби нулю*:

$$\frac{A}{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$$

В соответствии с этим алгебраическая дробь равна нулю при тех, и только тех значениях переменных, при которых ее числитель равен нулю, а знаменатель нет. Значит, если дробно-рациональное уравнение удается свести к виду $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$, то мы сразу можем перейти к решению системы: целого рационального уравнения $A(x)=0$ и неравенства $B(x)\neq 0$.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x)=0 \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$$

Поэтому чтобы решить дробно-рациональное уравнение, можно собрать все его члены в левой части, привести дроби к общему знаменателю, а затем перейти к решению системы, равносильной исходному уравнению. Например, уравнение, полученное нами выше при решении задачи, можно решить с помощью этого способа следующим образом:

$$\frac{x^2-7}{x-3}=\frac{2}{x-3}+12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-7}{x-3}-\frac{2}{x-3}-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-7-2-12(x-3)}{x-3}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-12x+27}{x-3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-12x+27=0 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Уравнение $x^2-12x+27=0$, как мы видели, имеет два корня, поэтому система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x^2-12x+27=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \text{ или } x=9 \\ x\neq 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ x\neq 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=9 \\ x\neq 3 \end{cases}.$$

Первая система не имеет решения, а вторая – имеет решение $x=9$. Значит, мы получили тот же самый ответ, что и в предыдущем случае: исходное уравнение имеет один корень $x=9$.

Таким образом, решение дробно-рационального уравнения можно свести к решению системы посредством следующего алгоритма.

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений
(с помощью условия равенства дроби нулю)

1. Перенести все слагаемые из правой части в левую, изменив их знаки на противоположные.
2. Привести все слагаемые в левой части уравнения к общему знаменателю (тем самым записать уравнение в виде $\dfrac{A}{B}=0$).
3. Составить систему $\begin{cases} A=0 \\ B\neq 0 \end{cases}$.
4. Решить первое уравнение системы и проверить удовлетворяют ли полученные корни второму соотношению системы.
5. Записать в ответ те из найденных корней, которые удовлетворяют второму соотношению системы.

Мы получили два способа решения дробно-рациональных уравнений, основанные на преобразовании дробных выражений в целые с учетом ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю.

Пример 1.

Решить уравнение: $\dfrac{4}{x+2}+3=\dfrac{3x^2-8}{x^2-4}$.

Решение:

<u>1 способ.</u>

$\dfrac{4}{x+2}+3=\dfrac{3x^2-8}{x^2-4}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 2$.

$\dfrac{4(x-2)+3(x^2-4)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)}$

$4x-8+3x^2-12=3x^2-8$

$4x-12=0$

$x=3$

$3 \in$ ОДЗ.

Ответ: 3.

<u>2 способ.</u>

Перенесем все слагаемые из правой части в левую и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{4}{x+2}+3-\frac{3x^2-8}{x^2-4}=0 \iff \frac{4(x-2)+3(x^2-4)-(3x^2-8)}{(x-2)(x+2)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{4x-8+3x^2-12-3x^2+8}{(x-2)(x+2)}=0 \iff \frac{4x-12}{(x-2)(x+2)}=0$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 4x-12=0 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \iff x=3$$

Ответ: 3.

К **119** 1) Какие из дробно-рациональных выражений не имеют смысла при $x=3$?

а) $\dfrac{x-3}{x}$; б) $\dfrac{x}{x-3}$; в) $x-3+\dfrac{3}{10-x}$; г) $\dfrac{1}{x^2-9}$.

2) Может ли -3 являться корнем уравнения $\dfrac{x+1}{2x-6}+\dfrac{9}{x^2-9}=\dfrac{x}{2x+6}$?

3) Укажите значения x, при которых потеряют смысл дробно-рациональные выражения, входящие в уравнение $\dfrac{2x-2}{x+3}+\dfrac{18}{x^2-9}=\dfrac{x-6}{x-3}$.

4) Укажите множество значений неизвестного, при которых имеют смысл все выражения, входящие в уравнение $\dfrac{2x-2}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$.

5) Предположите, какое множество значений неизвестного называют *областью допустимых значений* уравнения. Проверьте свое предположение с помощью учебника.

120 Проанализируйте таблицу и попытайтесь составить определение дробно-рациональных уравнений, сопоставьте свой вариант с определением, приведенным в учебнике.

Рациональные уравнения	
Целые уравнения	Дробно-рациональные уравнения
$2x-7=0$ $\frac{1}{2}x-5=x-4$ $x^2-2x+0{,}75=0$ $\frac{x-1}{5}+3=\frac{x+5}{2}$	$\frac{1}{x+1}=0$ $\frac{2}{x}-5=3x$ $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x(x-2)}$ $\frac{x+1}{x-4}+\frac{9}{x^2-16}=\frac{x}{2x+8}$

121 а) Чем похожи и чем отличаются данные уравнения:

$$\frac{x-3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{x+5}{20} \text{ и } \frac{x-6}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x(x-4)}?$$

Укажите область допустимых значений для каждого из уравнений.

б) Решите уравнение $\frac{x-3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{x+5}{20}$ известным вам способом.

в) Решите данным способом дробно-рациональное уравнение $\frac{x-6}{x-4}+\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x(x-4)}$? Какие дополнительные шаги необходимо выполнить при его решении?

г) Подойдет ли способ, который вы использовали при решении этого уравнения для решения всех дробно-рациональных уравнений? Составьте алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 30.

122 1) При каких значениях переменной равна нулю дробь:

а) $\frac{a-5}{8}$; б) $\frac{x+10}{x}$; в) $\frac{2}{x-5}$; г) $\frac{2y-2}{y-1}$; д) $\frac{a}{b}$.

2) Найдите корни уравнений, используя результаты выполнения предыдущего задания:

$\frac{a-5}{8}=0$; $\frac{x+10}{x}=0$; $\frac{2}{x-5}=0$; $\frac{2y-2}{y-1}=0$.

3) Используя идею решения предыдущих уравнений, решите дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2+x-4}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=0.$$

4) Составьте еще один алгоритм решения дробно-рациональных уравнений и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 31.

123 Решите дробно-рациональное уравнение двумя различными способами:

$$\frac{3}{8-5x}+\frac{5}{2-7x}=0\cdot$$

Какой из них вам больше понравился?

124 а) Рассмотрите еще один способ решения этого уравнения.

$$\frac{3}{8-5x}+\frac{5}{2-7x}=0.$$

ОДЗ: $x \neq 1{,}6$; $x \neq \frac{2}{7}$.

$$\frac{3}{8-5x}=\frac{5}{7x-2}$$

$3(7x-2)=5(8-5x)$

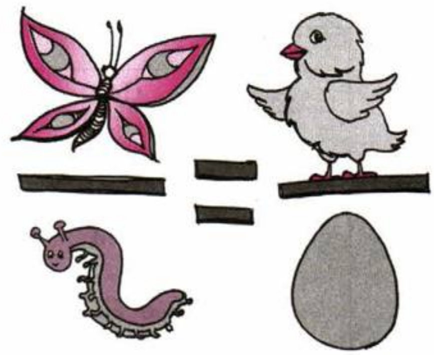
$21x-6=40-25x$

$46x=46$

$x=1$ принадлежит ОДЗ.

Ответ: 1.

Какое свойство лежит в основе этого решения?



б) Укажите уравнение, при решении которого удобнее использовать основное свойство пропорции:

$5x+\frac{6}{x}=11$; $\quad \frac{4}{x^2-9}+\frac{x+1}{x-3}=1$; $\quad \frac{x-4}{x+1}=\frac{x-9}{x}$; $\quad \frac{4-x}{x^2-9}=0$.

125 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{5x^2+25x}{x+1}=0$;

б) $\frac{x^2-4x}{x-4}=0$;

в) $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x}=1$;

г) $1+\frac{3}{x+4}=\frac{3}{x}$;

д) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$;

е) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$.

126 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{x-1}{x^3+3x^2+x+3}+\frac{1}{x^4-1}=\frac{x+1}{x^3+3x^2-x-3}$.

Решите задачи № 127–131, составив дробно-рациональное уравнение.

127 а) Пешеход должен был пройти 6 км за определенный срок. Однако он задержался с выходом на полчаса, поэтому, чтобы прийти вовремя, он шел со скоростью, превышающей намеченную на 1 км/ч. С какой скоростью шел пешеход?

б) Поезд был задержан на станции на 20 минут. Чтобы наверстать потерянное время, машинист увеличил скорость на 10 км/ч и на отрезке пути в 100 километров ликвидировал отставание. С какой скоростью поезд шел до задержки на станции?

128 а) Катер прошел 27 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на путь по течению на 1 ч меньше, чем на путь против течения. Какова скорость катера против течения реки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

б) Прогулочный теплоход в 10:00 вышел вниз по течению реки из пункта A в пункт B. Пробыв в пункте B 3 часа, теплоход отправился назад и вернулся в пункт A в 22:00. Определите собственную скорость теплохода, если известно, что скорость течения реки 1,5 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно 32,4 км (ответ выразите в км/ч).

129 а) Завод заключил договор на выполнение 180 станков к определенному сроку. Перевыполняя запланированную дневную норму на 2 станка, завод выполнил заказ на 1 день раньше срока. За сколько дней завод выполнил заказ?

б) Через две трубы треть бассейна наполнится за 2 ч. За сколько часов каждая труба наполнит бассейн, если одной потребуется на 9 ч больше, чем другой?

130 Последовательно составьте математические модели каждой из задач и решите последнюю из них:

1) Из пунктов A и B, расстояние между которыми составляет 6 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго и поэтому он потратил на путь на 1 час меньше, чем второй. Сколько времени был в пути второй пешеход, если шли они по одной и той же дороге?

2) Железнодорожные пути между пунктами A и B проходят только по одному маршруту, длиной в 324 км. Из пункта A в пункт B выехал поезд. Через 1 ч 30 минут из пункта B в пункт A выехал второй поезд. В пункты назначения они прибыли одновременно. Найдите скорость второго поезда, если она на 5 м/с больше скорости первого (ответ выразите в км/ч).

3) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист выехал на 40 минут позже велосипедиста. Встретились они на середине пути. Скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше скорости велосипедиста. Найдите их скорости, если эти пункты соединяет только одна дорога.

131 Последовательно составьте математические модели каждой из задач и решите последнюю из них.

1) Два велосипедиста одновременно выехали из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 45 км. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому он прибыл в пункт B на 30 мин раньше второго. Найдите скорость второго.

2) Из города A в город B, расстояние между которыми равно 120 км, выехал автобус. Через 1 ч вслед за ним по той же дороге выехала легковая машина, скорость которой на 20 км/ч больше, чем скорость автобуса. Легковая машина прибыла в пункт B одновременно с автобусом. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.

3) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус. А через 20 минут вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автобус пришел в пункт B на 10 минут позже легкового автомобиля. Найдите скорости автобуса и легкового автомобиля.

П **132** Запишите выражение в виде алгебраической дроби:

а) $\left(\dfrac{a^3}{b^4}\right)^4$; б) $\left(-\dfrac{m^2s^5}{6a^3}\right)^3$; в) $\left(-\dfrac{2a^2}{bn}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{n^3}{3a^3b}\right)^2$.

133 Упростите выражение:

а) $\dfrac{m+2}{m-3}\cdot\left(m-\dfrac{5m}{2+m}\right)$; б) $\left(\dfrac{b-2}{b+2}-\dfrac{b+2}{b-2}\right):\dfrac{b^2}{b^2-4}$.

134 Разделите многочлен на многочлен:

а) $(3x^3+2x^2-x-4):(x-1)$; б) $(x^5-3x^4-3x^2-5x+2):(x+2)$.

135 Выделите целую часть алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x+2}$; б) $\dfrac{x^5-3x^4+3x-5}{x-5}$.

136 Решите системы, используя подходящую замену неизвестных:

а) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=-2\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{y}=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2x}+\dfrac{y-1}{3y}=1\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-0{,}2\end{cases}$; в) $\begin{cases}\dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{6}{y-2x}=3\\ \dfrac{1}{2x+y}-\dfrac{18}{2x-y}=-5\end{cases}$.

137 Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Сумма двух чисел равна -10. Если из большего числа вычесть меньшее, то получится 120. Найдите эти числа.

б) В билетной кассе железнодорожного вокзала в первой половине дня продали 25 взрослых и 12 детских билетов до Санкт-Петербурга, а во второй половине дня – 15 взрослых и 20 детских билетов. При этом выручка в первой половине дня оказалась на 10 080 рублей больше, чем во второй половине дня. Каковы стоимость детского и взрослого билета, если стоимость детского билета составляет 35% стоимости взрослого билета?

138 В колбе было 150 г 80%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в нее столько же воды, чтобы получить 60%-ный раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

Д **139** Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\dfrac{x^2-7x}{x+7}=0$;

б) $\dfrac{x^2+2x}{2x+4}=0$;

в) $\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{1}{x+1}=4$;

г) $1+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{5}{x}$;

д) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}=\dfrac{18}{x^2-9}$;

е) $\dfrac{x^2}{x^2-1}-\dfrac{4}{x^2+1}=\dfrac{2}{x^4-1}$.

140 Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+3}{x^2+x}-\dfrac{12}{x^2+3x}+\dfrac{1}{x}=0$; б) $\dfrac{x+2}{x^3-1}+\dfrac{3}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{x-1}$.

141 Товарный поезд был задержан в пути на 18 минут, но затем на оставшихся 60 км пути наверстал упущенное время, увеличив скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

142 Катер прошел 8 км по течению реки и 16 км против течения реки, затратив на весь путь $1\dfrac{1}{3}$ ч. Какова скорость катера по течению, если собственная скорость катера равна 20 км/ч?

143 Завод заключил договор на выполнение 800 запасных деталей к определенному сроку. Перевыполняя запланированную дневную норму на 20 деталей, завод выполнил заказ на 2 дня раньше срока. За сколько дней завод выполнил этот заказ?

144 Сравните условия задач. Составьте математические модели обеих задач и решите одну из них.

1) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 20 км, выехал мотоциклист. Через 6 минут вслед за ним выехал автобус, скорость которого на 10 км/ч больше скорости мотоциклиста. Найдите скорости автобуса и мотоциклиста, если автобус приехал в пункт B на 4 минуты раньше мотоциклиста.

2) Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 24 км, выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого, который выехал на 20 минут раньше второго, на 6 км/ч меньше скорости второго. Встретились они на середине пути. Найдите их скорости.

145 Выполните действия:

а) $\dfrac{b-3a}{2ab}-\dfrac{b-a}{2ab}$;

б) $\dfrac{3-p}{12p^2}-\dfrac{3p+2}{8p^2}$;

в) $\dfrac{m-n}{mn^2}-\dfrac{n-m}{m^2n}$;

г) $\dfrac{x+2}{x^2-9}-\dfrac{2}{x^2-3x}$;

д) $\dfrac{3d^2}{2k}\cdot\dfrac{4k^4}{9d^3}$;

е) $\dfrac{c^2-1}{v^5+v^3}\cdot\dfrac{v^2+1}{c^2-c}$;

ж) $\dfrac{z^2-s^2}{5t+5k}:\dfrac{zs-s^2}{t+k}$;

з) $\dfrac{a^3-d^3}{y^2+2yr+r^2}:\dfrac{a^2+ad+d^2}{y+r}$;

и) $\dfrac{4a^2-2ab+b^2}{a^3+8b^3}:\dfrac{a^2-4b^2}{(a-2b)^2}$;

к) $\dfrac{3xy^2-12x^3}{8x^3-y^3}:\dfrac{3x^2+6xy}{4x^2+2xy+y^2}$;

л) $\dfrac{a-6}{a^2-a-30}\cdot\dfrac{a^2+10a+25}{3a^2+15a}$;

м) $\dfrac{a^4-1}{a^3-1}\cdot\dfrac{a^2+a+1}{a+1}$.

146 Выделите целую часть алгебраической дроби: $\dfrac{3x^3+x^2-x+19}{x+3}$.

147 Решите систему, используя подходящую замену неизвестных:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{y-1}=1\\[2mm] \dfrac{5}{x+2}+\dfrac{3}{y-1}=-2\end{cases}.$$

148 Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Скорость моторной лодки по течению реки составила 20 км/ч, а против течения – 15 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

б) На двух полках 64 книги. Если переставить со второй полки третью часть книг на первую, то на первой станет в три раза больше книг, чем останется на второй. Сколько книг было на каждой полке?

C **149*** При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{(x-a)(x-1)}$ не имеет решения?

150* Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

5.* Способы решения дробно-рациональных уравнений

Мне кажется, что, как правило, следует всегда выбирать простейший путь, а при одинаковых трудностях – наиболее ясный...

Лазар Карно (1753–1823),
французский государственный деятель, инженер и ученый

В предыдущем пункте мы вывели алгоритмы решения дробно-рациональных уравнений, основанные на преобразовании дробных выражений к целым с учетом ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю. Но известны и другие способы решения дробно-рациональных уравнений, которые позволяют в ряде случаев существенно упростить решение. Познакомимся с несколькими такими способами на конкретных примерах.

Замена неизвестного

При решении дробно-рациональных уравнений нередко эффективной бывает уже знакомая нам замена неизвестного.

Пример 1.

Решите уравнение: $\frac{7}{x-4}=3\left(\frac{2}{x-4}-5\right)+9$.

Решение:

Заметим, что, обозначив $\frac{1}{x-4}$ с помощью нового неизвестного y, то есть сделав замену $y=\frac{1}{x-4}$, мы сможем представить наше уравнение в виде:

$$7y = 3(2y-5)+9$$

Тем самым от дробно-рационального уравнения с неизвестным x мы перешли к линейному уравнению с неизвестным y. Решим последнее уравнение.

$$7y = 3(2y-5)+9 \;\Leftrightarrow\; 7y = 6y-15+9 \;\Leftrightarrow\; y=-6.$$

Вернемся к неизвестному x. Так как $y=\frac{1}{x-4}$, то $\frac{1}{x-4}=-6$. Мы получили уравнение, равносильное данному, но имеющее существенно более простой вид.

$$\frac{1}{x-4}=-6$$

Решим его по известному алгоритму. ОДЗ полученного уравнения: $x \neq 4$.

$$1=-6(x-4) \;\Leftrightarrow\; 1=-6x+24 \;\Leftrightarrow\; -6x=-23 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{23}{6} \;\Leftrightarrow\; x=3\frac{5}{6}$$

Так как $3\frac{5}{6} \neq 4$, то полученное значение x является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\left\{3\frac{5}{6}\right\}$.

В рассмотренном примере мы ввели новое обозначение для алгебраической дроби. Иногда же для упрощения решения уравнения бывает полезно обозначить новой переменной более сложное повторяющееся выражение.

Пример 2.

Решите уравнение $\dfrac{1}{x-3+\dfrac{8}{x}}-\dfrac{1}{x+2+\dfrac{8}{x}}=\dfrac{5}{24}$.

Решение:

Сделав замену $t=x+\dfrac{8}{x}$, мы можем упростить первоначальное уравнение:

$$\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+2}=\frac{5}{24}$$

Найдем ОДЗ полученного уравнения: $t \neq 3$, $t \neq -2$.

Приведем обе части уравнения к ОЗ, равному $24(t-3)(t+2)$, и домножим на него обе части уравнения:

$$24(t+2)-24(t-3)=5(t-3)(t+2).$$

Упростим полученное уравнение и найдем его корни:

$$120=5(t^2-3t+2t-6) \Leftrightarrow t^2-t-30=0 \Leftrightarrow t_1=6,\ t_2=-5.$$

Полученные корни не равны ни 3, ни -2, то есть оба принадлежат ОДЗ. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения. Решим их.

1) $x+\dfrac{8}{x}=6$

ОДЗ: $x \neq 0$

$x^2-6x+8=0$

По теореме, обратной теореме Виета:

$x_1=2$, $x_2=4$

2) $x+\dfrac{8}{x}=-5$

ОДЗ: $x \neq 0$

$x^2+5x+8=0$

$D=25-32<0$

$\varnothing$

Корни первого уравнения не равны нулю, значит, они принадлежат ОДЗ и являются корнями исходного уравнения. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $\{2;\ 4\}$.

Иногда замена переменных бывает не столь явной, и прежде чем понять, какое выражение удобно заменить новой переменной, уравнение требуется преобразовать.

Пример 3.

Решите уравнение: $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$.

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{16x-12}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{4(4x-3)}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{4x-3}+5=\frac{4}{\dfrac{2x-x^2}{4x-3}}$$

Теперь легко видеть, что удобно сделать замену $t=\dfrac{x^2-2x}{4x-3}$, тогда уравнение примет вид: $t+5=-\dfrac{4}{t}$. Решим его.

ОДЗ: $t \neq 0$.

Домножим на t обе части уравнения и найдем его корни:

$$t^2 + 5t + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = -1,\; t_2 = -4.$$

Полученные корни не равны 0, то есть оба принадлежат ОДЗ. Поэтому исходное уравнение распадается на два уравнения. Решим их.

1) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}=-1$

ОДЗ: $x \neq 0{,}75$

$x^2 - 2x = -4x + 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_1 = 1,\; x_2 = -3.$

2) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}=-4$

ОДЗ: $x \neq 0{,}75$

$x^2 - 2x = -4(4x + 3)$

$x^2 + 14x - 12 = 0$

$x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{61}$

Все полученные корни не равны $0{,}75$, то есть принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{1;\ -3;\ -7+\sqrt{61};\ -7-\sqrt{61}\}$.

Как мы видим, при использовании метода замены неизвестного нет необходимости сразу выписывать ОДЗ исходного уравнения. Достаточно сначала найти ОДЗ уравнения, полученного в результате замены неизвестного, а потом ОДЗ одного или нескольких уравнений, полученных после возврата к «старому» неизвестному.

* * *

Одним из эффективных способов решения дробно-рациональных уравнений является выделение целой части алгебраической дроби.

Выделение целой части

Пример 4.

Решите уравнение: $\dfrac{12x-31}{3x-9}-\dfrac{6x+23}{3x+9}=\dfrac{10x-9}{2x-2}-\dfrac{6x+7}{2x+2}$.

Решение:

Найдем ОДЗ – это множество рациональных чисел, кроме $x = 3$; $x = -3$; $x = 1$; $x = -1$.

Выделим целые части во всех алгебраических дробях. Для этого разделим «в столбик» их числители на знаменатели.

На ОДЗ данного уравнения мы можем разделить числители всех алгебраических дробей на их знаменатели. Тогда получаем:

$$4+\frac{5}{3x-9}-2-\frac{5}{3x+9}=5+\frac{1}{2x-2}-3-\frac{1}{2x+2} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{3(x-3)}-\frac{5}{3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$$

Приведем каждую часть полученного уравнения к общему знаменателю и упростим получившееся уравнение:

$$\frac{5(x+3)-5(x-3)}{3(x^2-9)}=\frac{x+1-(x-1)}{2(x^2-1)} \;\Leftrightarrow\; \frac{10}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-1}$$

Теперь воспользуемся основным свойством пропорции. Это можно сделать, так как на ОДЗ знаменатели дробей не равны нулю. Тогда получаем следующее уравнение:

$$10\,(x^2-1) = x^2 - 9$$

Преобразуем это уравнение и найдем его корни:

$10x^2-10=x^2-9 \Leftrightarrow 9x^2-1=0 \Leftrightarrow (3x-1)(3x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ или $x=-\frac{1}{3}$.

Полученные корни принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}$.

При решении дробно-рациональных уравнений часто бывает полезным комбинирование способов выделения целой части и замены неизвестного.

Выделение целой части и замена неизвестного

Пример 5.

Решите уравнение: $\frac{4x-9}{x+3}=5+\frac{6}{x+3}$.

Решение:

Найдем ОДЗ: $x \neq -3$.

Выделим целую часть дроби $\frac{4x-9}{x+3}$. Для этого разделим «в столбик» ее числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 4x-9 & x+3 \\ \cline{2-2} -\underline{4x+12} & 4 \\ -21 & \end{array}$$

Тогда на области допустимых значений данного уравнения оно преобразуется к виду:

$$4-\frac{21}{x+3}=5+\frac{6}{x+3}$$

Обозначив $y=\frac{1}{x+3}$, сделаем замену неизвестного и решим полученное уравнение:

$$4-21y=5+6y \Leftrightarrow 4-5=21y+6y \Leftrightarrow 27y=-1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{27}$$

Теперь вернемся к «старому» неизвестному: $\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{27}$

Так как $x \neq -3$, воспользуемся основным свойством пропорции и решим полученное уравнение:

$$-(x+3)=27 \Leftrightarrow -x-3=27 \Leftrightarrow -x=30 \Leftrightarrow x=-30.$$

Так как -30 принадлежит ОДЗ, то -30 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\{-30\}$.

К **151** Проанализируйте уравнение: $\frac{7}{x-4}=36\left(\frac{2}{x-4}-5\right)+9$.

1) Что интересного вы замечаете в записи этого уравнения?

2) Какой прием поможет упростить решение этого уравнения?

Решите данное уравнение с помощью этого приема. Сравните свой способ решения со способом, предложенным на стр. 38.

152 Решите уравнения с помощью замены неизвестного:

а) $-\frac{2x}{x-4}=13-4\left(\frac{2x}{x-4}+1\right)$; б) $x^2-2x-\frac{3}{x^2-2x}=2$.

153 Решите уравнения с помощью замены неизвестного:

а) $\dfrac{7}{x-\dfrac{3}{x}+1}-\dfrac{2}{x-\dfrac{3}{x}-1}=\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{x^2+5x}{3x-1}+\dfrac{9x-3}{x^2+5x}=4$.

154 Решите уравнения, используя выделение целой части алгебраической дроби:

а) $\dfrac{3x-1}{x-2}+\dfrac{2x-1}{x+2}=9$; б) $\dfrac{3x+2}{x-3}-9=\dfrac{5}{x-3}$.

П **155** Велосипедист проехал 18 км с одной скоростью. А оставшиеся 6 км со скоростью на 6 км/ч меньшей первоначальной. Найдите скорость велосипедиста на втором участке пути, если на весь путь он потратил 1,5 часа.

156 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-|y|=-1 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x-4y=1 \\ |3x+9y|=12 \end{cases}$; в) $\begin{cases} -3|x|+4y=1 \\ 5|x|-3y=13 \end{cases}$.

157 Решите систему уравнений способом подстановки. Выполните проверку полученного результата, решив систему способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ -3x+5y-3z=14 \\ 4x-5y+6z=9. \end{cases}$$

158 Решите квадратные неравенства:

а) $x^2+6x<0$;

б) $x^2+15x+56\geqslant 0$;

в) $-3x^2+8x-5>0$;

г) $x^2+x+1>0$.

Д **159** Решите уравнение:

а) $\dfrac{14x-7}{5x+2}-2=5\left(\dfrac{4x-2}{5x+2}-1\right)$; б) $x^2+3x-\dfrac{27}{x^2+3x}=6$.

160 Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{x}-2}+\dfrac{8}{x+\dfrac{2}{x}+1}=3$; б) $\dfrac{x^2-5x}{x+1}+\dfrac{28x+28}{x^2-5x}+16=0$.

161 Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x+16}{x+3}+\dfrac{5x-22}{x-3}=2$; б) $\dfrac{5x+11}{2x+5}=2+\dfrac{3}{2x+5}$.

162 Велосипедист проехал с определенной скоростью 10 км от города до турбазы. Возвращаясь обратно, он снизил скорость на 5 км/ч. На путь туда и обратно велосипедист затратил 1ч 40 мин. С какой скоростью возвращался велосипедист?

163 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2|x|+y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ |x-y|=6 \end{cases}$.

164 Решите квадратные неравенства:

а) $4x^2-1\leqslant 0$; б) $x^2-2x-99>0$; в) $3x^2+2x+5>0$.

C **165*** Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

166* У двух братьев день рождения в один день, но один родился в XX веке, а второй уже в XXI. На праздновании своего общего дня рождения они обнаружили, что и у того и у другого возраст равен сумме цифр года рождения. Найдите разницу в возрасте братьев.

167* Докажите, что для любого натурального числа n можно выбрать такое натуральное число a, чтобы число $a(n+1)-(n^2+n+1)$ нацело делилось на n^3.

Экспресс-тест № 7

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Найдите значение алгебраической дроби $\dfrac{5-8a}{4-9a}$ при $a = 12$.

А) $-\dfrac{91}{104}$; Б) $\dfrac{91}{104}$; В) $\dfrac{7}{8}$; Г) $-\dfrac{7}{8}$.

№ 2			
1	2	3	4

№ 2. Установите соответствие между алгебраической дробью и ее областью определения:

1) $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$; 2) $\dfrac{x}{x(x+1)}$; 3) $\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$; 4) $\dfrac{1}{x+1}$.

А) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; В) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$;

Б) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

№ 3

№ 3. Сократите дробь $\dfrac{6+m}{m^2+12m+36}$.

А) $\dfrac{1}{m+6}$; Б) $\dfrac{1}{m^2+2m+6}$; В) $\dfrac{1}{2}$; Г) $\dfrac{1}{m^2+2}$.

№ 4

№ 4. Решите дробно-рациональное уравнение $\dfrac{y^2}{y^2-16} = \dfrac{12y-32}{y^2-16}$.

А) $\varnothing$; Б) $\{-4; 4; 8\}$; В) $\{4; 8\}$; Г) 8.

№ 5			
1	2	3	4

№ 5. Установите соответствие между выражением и результатом его упрощения:

1) $\dfrac{d-5b}{d+b} \cdot \dfrac{d^2-b^2}{2d-10b}$; 3) $\dfrac{5d-25}{d^2+5d} : \dfrac{d-5}{25+10d+d^2}$;

2) $\dfrac{d-b}{d+b} - \dfrac{d+b}{d-b}$; 4) $\dfrac{3d+4}{24d} + \dfrac{4d-3}{18d}$.

А) $\dfrac{25}{72}$; Б) $-\dfrac{4db}{d^2-b^2}$; В) $\dfrac{d-b}{2}$; Г) $\dfrac{5d+25}{d}$.

Часть В

№ 6

№ 6. Упростите выражение $\left(\frac{6s}{c}-\frac{6s}{s+c}\right)\cdot\left(\frac{c+s}{3s}\right)^2$ и найдите его значение при $s=-1$ и $c=1\frac{1}{3}$.

А) $-\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{6}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) $-1\frac{1}{2}$.

№ 7

№ 7. Найдите остаток от деления многочлена $5x^4-3x^2+x+3$ на многочлен $x-1$.

А) 0; Б) 3; В) 2; Г) 6.

Часть С

(ход решения и ответ записываются на отдельном листе)

№ 8. Решите уравнение $\left(\frac{x^2+5}{x}\right)-24=\frac{2x^2+10}{x}$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2				№ 3	№ 4	№ 5				№ 6	№ 7
В	*1*	*2*	*3*	*4*	*А*	*Г*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Б*	*Г*
	Б	*В*	*Г*	*А*			*В*	*Б*	*Г*	*А*		

№ 8

$$\left(\frac{x^2+5}{x}\right)-24=\frac{2x^2+10}{x}$$

$$\left(\frac{x^2+5}{x}\right)-2\left(\frac{x^2+5}{x}\right)-24=0$$

Решим уравнение методом замены неизвестного.

Пусть $\frac{x^2+5}{x}=t$, тогда $t^2-2t-24=0$.

По теореме, обратной теореме Виета: если $t_1+t_2=2$ и $t_1\cdot t_2=-24$, то t_1 или t_2 корни уравнения, то есть $t_1=6$ или $t_2=-4$.

Верненмся к неизвестному x:

$\frac{x^2+5}{x}=6$	$\frac{x^2+5}{x}=-4$
ОДЗ: $x\neq 0$	ОДЗ: $x\neq 0$
$x^2+5-6x=0$	$x^2+5+4x=0$
$x^2-6x+5=0$	$x^2+4x+5=0$
По теореме, обратной теореме Виета:	$\varnothing$ $(D<0)$
$x_1=5$, $x_2=1$; $5; 1\in$ ОДЗ	

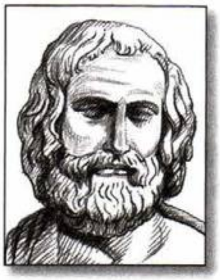
Ответ: $\{1; 5\}$.

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично;*
7–8 баллов – *хорошо;*
5–6 баллов – *удовлетворительно.*

§ 2. Рациональные неравенства

1. Решение рациональных неравенств. Метод интервалов



Ни одна вещь не возникает, не уничтожается,
но каждая составляется из смешения существующих вещей
или выделяется из них.

Анаксагор (ок. 500–428 до н.э.),
древнегреческий философ

Мы уже умеем решать линейные и квадратные неравенства, которые были получены нами как математические модели практических задач. В данном пункте мы расширим свои возможности по решению неравенств, возникающих в процессе математического моделирования окружающего мира.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача

Семья дачников пешком отправилась в путешествие к озеру, для этого им пришлось преодолеть расстояние в 6 км. На обратный путь они потратили на 1 ч больше, чем на путь к озеру. Разница между скоростью движения к озеру и скоростью на обратном пути составила не менее 1 км/ч. Сколько времени они добирались к озеру?

Решение:

Пусть время, затраченное на путь к озеру, составило x ч, где $x > 0$. Тогда:

	Расстояние, км	Время, ч	Скорость, км/ч
К озеру	6	x	$\frac{6}{x}$
Обратно	6	$x+1$	$\frac{6}{x+1}$

По условию, разница между скоростью движения к озеру и скоростью на обратном пути составила не менее 1 км/ч. Следовательно, математическая модель задачи выглядит так:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{6}{x+1} \geqslant 1 \\ x > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x - ?}$$

При решении этой задачи нами получены так называемые *рациональные* неравенства. Как и в случае рациональных выражений, выделяются *целые* и *дробно-рациональные* неравенства. Введем следующие определения.

***Определение* 1. Рациональным неравенством** называется неравенство, обе части которого являются рациональными выражениями.

***Определение* 2. Целым неравенством** называется рациональное неравенство, обе части которого являются целыми выражениями.

Определение 3. **Дробно-рациональным неравенством** называется рациональное неравенство, одна из частей которого является целым рациональным выражением, а другая дробно-рациональным или обе части которого являются дробно-рациональными выражениями.

Разберемся сначала со способом решения целых неравенств. Некоторые из них – линейные и квадратные неравенства – мы уже умеем решать. Выведем на этой основе общий способ решения любых рациональных неравенств.

При решении квадратных неравенств мы использовали графики соответствующих функций. Например, чтобы решить неравенство $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, мы находили нули функции $y = x^2 - 5x + 6$ и определяли ее знак на каждом из образовавшихся интервалов (рис. 1). Корнями трехчлена $x^2 - 5x + 6$ являются числа 2 и 3 (точки на оси закрашены, так как неравенство нестрогое), ветви параболы направлены вверх. Поэтому неравенству удовлетворяет любой x из множества $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

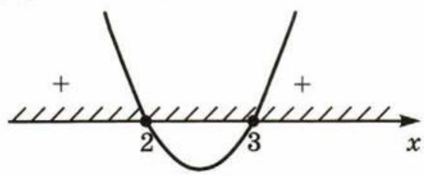


Рис. 1

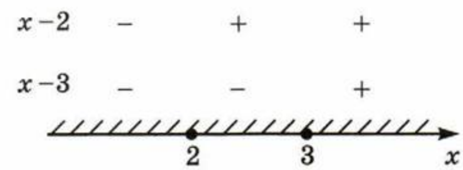


Рис. 2

В общем случае график целой функции степени больше 2 построить непросто. Однако, по сути, для решения неравенств требуется не сам график, а лишь знание интервалов по оси x, где многочлен сохраняет свой знак: «+» (положителен) или «–» (отрицателен). Такие интервалы называют *интервалами (промежутками) знакопостоянства*. Попробуем их найти другим способом, без построения графика функции.

Разложим наш квадратный трехчлен на множители, тогда:

$$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-3) \geqslant 0$$

Отметим на оси x закрашенными точками числа 2 и 3, где $(x - 2)(x - 3) = 0$, и определим знак каждого множителя и знак всего произведения на полученных промежутках (рис. 2).

$$x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2; \qquad\qquad x - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

Значит, двучлен $x - 2$ положителен справа от своего корня 2 и отрицателен слева от 2. Аналогично, второй множитель $x - 3$ положителен справа от 3 и отрицателен слева от 3. Знак произведения определим по правилам знака произведения двух множителей. Мы получаем тот же результат: $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Приведенный способ решения неравенств называют **методом интервалов**. Как мы видели, он включает в себя следующие шаги:

1. Выделить на числовой оси x интервалы знакопостоянства.
2. Определить знак выражения на каждом из интервалов.
3. Выбрать те интервалы, которые соответствуют знаку неравенства.
4. Если неравенство нестрогое, включить в ответ концы интервалов.

Метод интервалов дает нам ключ к решению любого целого неравенства. Действительно, любой многочлен можно разложить в произведение линейных множителей и квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом (примем пока это утверждение без доказательства), а их знаки мы определять умеем. Тогда знак всего многочлена мы найдем по известным нам правилам знака произведения, а затем просто выберем нужные интервалы.

Решим методом интервалов следующее целое неравенство.

Пример 1.

Решить неравенство $(2x-1)^2(x-2)^3(-5x+15)<0$.

Решение:

1) Прежде всего упростим исходное неравенство, выполнив равносильные преобразования.

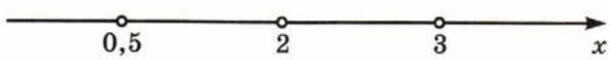
Избавимся от отрицательного коэффициента при старшем члене третьего множителя. Для этого умножим обе части неравенства на (-1), изменяя знак неравенства на противоположный. Получим неравенство:

$$(2x-1)^2(x-2)^3(5x-15)>0.$$

Разделив обе части равенства на $2^2 \cdot 5 = 20$, приходим к неравенству, в левой части которого стоит произведение множителей вида $(x-a)^n$:

$$(x-0{,}5)^2(x-2)^3(x-3)>0.$$

2) Найдем корни каждого множителя: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, отметим их на оси x. Мы получим 4 промежутка, на каждом из которых знак выражения в левой части неравенства не меняется. Поскольку неравенство строгое, то отмеченные точки не войдут в решение неравенства – «выколем» их.



3) Определим последовательно знаки каждого множителя и всего произведения на всех выделенных промежутках.

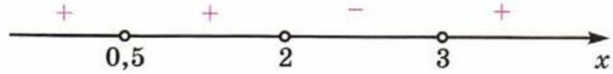
На самом правом промежутке все двучлены $x-0{,}5$, $x-2$, $x-3$ положительны, и поменяют знак с + на – при переходе через свои корни.

Выражение $x-2$ поменяет свой знак при переходе через точку 2, значит, и множитель $(x-2)^3$ в силу нечетности показателя степени его тоже поменяет.

Смены знака не будет только у квадрата двучлена $x-0{,}5$, так как любая его четная степень положительна при всех $x \neq 0{,}5$.

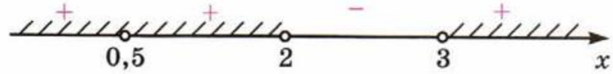
Теперь, зная знаки множителей, мы можем определить знак всего произведения на каждом из промежутков. Получаем:

$(x-0{,}5)^2$	+	+	+	+
$(x-2)^3$	–	–	+	+
$x-3$	–	–	–	+
$(x-0{,}5)^2(x-2)^3(x-3)$	+	+	–	+



4) В соответствии со знаком неравенства, выберем промежутки, на которых левая часть неравенства положительна, и запишем ответ:

$(x-0{,}5)^2(x-2)^3(x-3)$ + + – +



Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

Заметим, что знаки на выделенных интервалах можно было получить быстрее. Поскольку все точки первого справа интервала расположены правее любого из отмеченного нами корней, то на нем *любой* из двучленов нашего неравенства вида $x-a$ имеет знак «+». Значит, и знак произведения этих двучленов и их степеней тоже «+».

При этом смена знака одного из множителей приведет к смене знака всего произведения. Поэтому, зафиксировав знак «+» на самом правом интервале, знаки произведения множителей вида $(x-a)^n$ на остальных интервалах можно определить *без всяких вычислений* по следующему правилу.

Правило смены знаков произведения множителей вида $(x-a)^n$

При переходе через точку a знак произведения:

- не меняется, если множитель $(x-a)$ имеет четную степень;
- меняется на противоположный, если множитель $(x-a)$ имеет нечетную степень.

В некоторых случаях, прежде чем применять метод интервалов, неравенство требуется преобразовать. Решим следующий пример, используя приведенное правило «быстрого» определения знака произведения.

Пример 2.

Решить неравенство $x(x^3+2) \geqslant 2x+1$.

Решение:

1) Перенесем все слагаемые влево и упростим полученное выражение.

$$x(x^3+2) \geqslant 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4+2x-2x-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4-1 \geqslant 0$$

Разложим многочлен x^4-1, стоящий в левой части неравенства, на множители $(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Квадратный трехчлен x^2+1 имеет отрицательный дискриминант, а старший коэффициент $a=1>0$, поэтому он всегда положителен, и при решении неравенства его можно не учитывать. Приходим к неравенству:

$$x^4-1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2+1) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \geqslant 0$$

2) Отметим на числовой прямой точки 1 и -1, при которых $(x-1)(x+1)=0$. Учитывая, что неравенство нестрогое, точки закрашиваем, их следует включить в решение неравенства.

На первом интервале справа ставим знак «+», а при переходе через каждую отмеченную нами точку меняем знак на противоположный.

3) Выберем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Опыт решения примеров 1 и 2 показывает, что любое целое неравенство можно привести к неравенству, в левой части которого стоит произведение множителей вида $(x-a)^n$, а в правой части – 0, используя следующие равносильные преобразования:

- слагаемые можно переносить из одной части неравенства в другую, изменяя знак на противоположный;
- многочлены можно раскладывать на множители по изученным ранее правилам;
- старшие коэффициенты всех множителей можно привести к 1 путем умножения и деления обеих частей неравенства на одно и то же число, отличное от 0 (если число положительное, знак неравенства не меняется, а если отрицательное – меняется на противоположный);

• квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ с отрицательным дискриминантом $D < 0$ положителен на всей числовой прямой, поэтому на знак произведения он не влияет и при решении неравенства его можно отбросить[2].

Знак произведения множителей вида $(x - a)^n$ в первом справа интервале всегда «+», а в остальных интервалах его можно определять автоматически по приведенному выше правилу смены знаков.

Итак, мы приходим к следующему *алгоритму решения целых рациональных неравенств методом интервалов*.

Алгоритм решения целых рациональных неравенств методом интервалов

1. Используя равносильные преобразования, привести правую часть неравенства к нулю, а левую – к произведению множителей вида $(x - a)^n$, где $n \in \mathbf{N}$.
2. Отметить на числовой прямой точки, при которых полученное произведение равно нулю (закрашенные либо выколотые в зависимости от строгости неравенства).
3. Указать знак «+» полученного произведения на первом справа интервале.
4. Последовательно проставить знаки в остальных интервалах, пользуясь **правилом смены знаков** произведения множителей вида $(x - a)^n$.
5. Определить по схеме интервалы и (или) точки, удовлетворяющие знаку неравенства (или то, что таких нет).
6. Записать ответ.

Перейдем теперь к решению дробно-рациональных неравенств. Очевидно, что любое дробно-рациональное неравенство можно привести путем равносильных преобразований (перенос слагаемых, приведение к общему знаменателю) к одному из неравенств вида:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

Поскольку знаки произведения и частного чисел совпадают, то мы можем записать следующие утверждения для строгого и нестрогого неравенств $>$ и $\geqslant$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x) \cdot g(x) > 0; \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Аналогичные утверждения можно составить для неравенств со знаками, соответственно, $<$ и $\leqslant$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \iff f(x) \cdot g(x) < 0; \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств сводится к решению целых неравенств.

[2] При этом следует определить знак дискриминанта и обосновать преобразование положительностью выражения, на которые делятся обе части неравенства.

Алгоритм решения дробно-рациональных неравенств методом интервалов

1. Привести путем равносильных преобразований левую часть неравенства к виду $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, а правую – к нулю.

2. Заменить полученное неравенство равносильным целым неравенством, в левой части которого стоит $f(x)\cdot g(x)$, а справа 0 (для нестрогих неравенств записать дополнительное условие $g(x)\neq 0$).

3. Решить полученное целое неравенство (для нестрогих неравенств исключить из решения точки, где $g(x)=0$).

4. Записать ответ.

Применим данный алгоритм к решению дробно-рационального неравенства, полученного нами в задаче, сформулированной в начале этого пункта:

$$\frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}\geqslant 1$$

Перенесем все слагаемые из правой части неравенства в левую:

$$\frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}\geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6}{x}-\frac{6}{x+1}-1\geqslant 0$$

Приведем все слагаемые в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{6(x+1)-6x-x(x+1)}{x(x+1)}=\frac{6x+6-6x-x^2-x}{x(x+1)}=\frac{-x^2-x+6}{x(x+1)}$$

В числителе коэффициент при старшем члене отрицательный, поэтому обе части неравенства домножим на (-1) и изменим его знак:

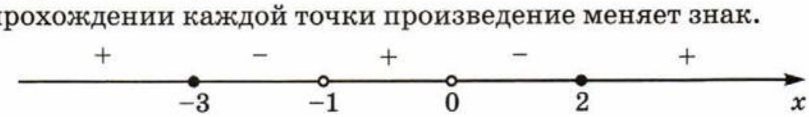
$$\frac{-x^2-x+6}{x(x+1)}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+x-6}{x(x+1)}\leqslant 0$$

Разложим числитель дроби на множители и заменим полученное неравенство равносильной ему системой.

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x(x+1)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-2)(x+3)\leqslant 0 \\ x(x+1)\neq 0 \end{cases}$$

Неравенство нестрогое, поэтому все точки «из числителя» включаем в решение. Точки «из знаменателя» выкалываем.

В крайнем правом интервале ставим знак «+». Все множители в первой степени, поэтому при прохождении каждой точки произведение меняет знак.



Укажем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем их $x\in[-3;-1)\cup(0;2]$.

Выберем из этих промежутков значения x, удовлетворяющие второму соотношению системы $(x>0)$, получим $x\in(0;2]$.

Ответ: дачники потратили на путь к озеру не более 2 ч.

В заключение разберем еще один пример решения неравенства с необычной формой ответа.

Пример 3.

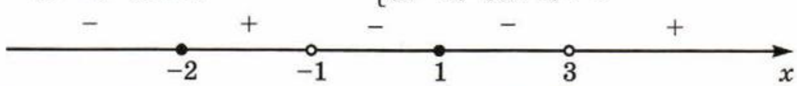
Решите неравенство $\dfrac{(x^3+8)(x^4-1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0$.

Решение:

$$\frac{(x^3+8)(x^4-1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0.$$

Квадратные трехчлены $x^2 - 2x + 4$ и $x^2 + 1$ всегда положительны ($D < 0$), поэтому при решении неравенства их можно не учитывать.

$$\frac{(x+2)(x-1)^2(x+1)^2}{(x-3)^3(x+1)} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (x+2)(x-1)^2(x+1)^3(x-3)^3 \geqslant 0 \\ (x-3)^3(x+1) \neq 0 \end{cases}.$$



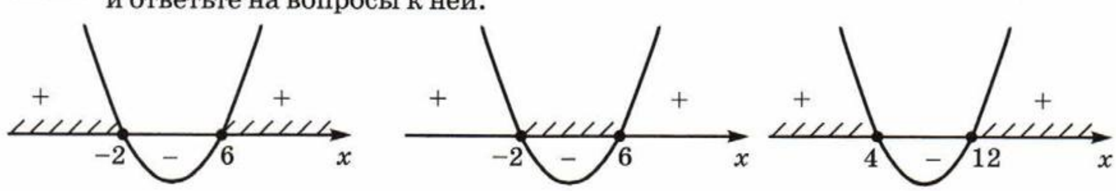
В соответствие со схемой помимо двух промежутков знаку неравенства удовлетворяет и отдельно стоящая точка 1, включим ее в ответ.

Ответ: $x \in [-2;-1) \cup \{1\} \cup (3;+\infty)$.

Замечание. В ходе решения этого неравенства мы получили алгебраическую дробь, числитель и знаменатель которой имели общий множитель $(x + 1)$. Однако сокращение мы не произвели, так как данное преобразование неравенства не является равносильным.

Вообще говоря, для решения дробно-рациональных неравенств методом интервалов необязательно переносить множители из знаменателя в числитель. Дело в том, что правило смены знаков, аналогичное тому, что мы сформулировали для произведения, выполняется и для частного. И с учетом «выкалывания» точек «из знаменателя» им тоже можно пользоваться. Однако при решении последнего неравенства переход от дробно-рационального неравенства к целому помог нам обойтись без ряда дополнительных рассуждений.

К **168** Выберите схему, которая получена при решении неравенства $x^2 - 4x - 12 \geqslant 0$, и ответьте на вопросы к ней.



а) На каком из интервалов квадратный трехчлен $x^2 - 4x - 12$ имеет знак «−»? знак «+»?

б) Выпишите три интервала, на которые корни трехчлена $x^2 - 4x - 12$ разбивают числовую прямую.

в) Меняет ли знак функция $y = x^2 - 4x - 12$ на каждом из этих интервалов? Прочитайте в учебнике, как называются такие интервалы.

169 1) При каком x двучлен $x - 6$ равен нулю? Укажите интервал, на котором этот двучлен отрицателен. Укажите интервал, на котором этот двучлен положителен. Выполните это задание для двучлена $x + 2$.

2) На каком промежутке двучлен $x - a$ положителен, а на каком отрицателен?

170 Используя результаты выполнения предыдущего задания, дополните схему. Объясните знаки произведения $(x-6)(x+2)$, указанные на ней:

$x-6$	□	□	□
$x+2$	□	□	□
$(x-6)(x+2)$	$+$	$-$	$+$
x	-2	6	

Сделайте вывод о способе нахождения интервалов знакопостоянства для произведения $(x-a)(x-b)$.

171 Какое из этих неравенств не является равносильным остальным неравенствам:

а) $3x^2 - 10x + 3 < 0$;

б) $(x-3)(3x-1) < 0$;

в) $-3x^2 + 10x - 3 < 0$;

г) $3(x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) < 0$?

172 Как можно решить неравенство $x^2 - 4x - 12 \geqslant 0$, не используя график соответствующей функции?

Подойдет ли способ, который вы предложили для решения этого неравенства для решения всех квадратных неравенств? Как бы вы назвали этот метод, сопоставьте его с методом, описанным на стр. 46.

173 Решите неравенства:

а) $(x-7)(x+8) > 0$;

б) $(x-3)(x+2) < 0$;

в) $(x+1)(x-5) \geqslant 0$;

г) $(x-1)(x+2) \leqslant 0$;

д) $x(x-5) < 0$;

е) $x(x+2) \geqslant 0$.

174 Решите неравенства методом интервалов:

а) $4x^2 - 4x + 1 > 0$;

б) $x^2 - 2x + 1 < 0$;

в) $9x^2 + 6x + 1 \leqslant 0$;

г) $9x^2 - 24x + 16 \geqslant 0$.

Чем похожи эти неравенства?

175 Решите квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2 + 3x + 2 < 0$;

б) $x^2 - 7x + 12 > 0$;

в) $2x^2 + 5x + 2 \leqslant 0$;

г) $12x^2 - x - 1 \geqslant 0$;

д) $3x^2 + 5x - 7 > 0$;

е) $-2x^2 - 5x + 1 \geqslant 0$.

Чем отличаются от предыдущих неравенства $2x^2 - x + 1 \geqslant 0$ и $7x^2 - 2x + 3 < 0$? Решите их.

176 1) Решите методом интервалов неравенство $(x-1)^2(x-2)^3 > 0$.

Изменяется знак $(x-2)^3$ при переходе через точку 2?

Изменяется знак $(x-1)^2$ при переходе через точку 1?

Как можно обобщить результаты этих наблюдений для всех степеней двучлена $(x-a)^n$?

2) Решите методом интервалов неравенство $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$.

Какой знак имеет каждый из его множителей на самом правом промежутке?

Как изменяется знак *всего* произведения $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ при переходе через каждую из отмеченных на числовой прямой точек?

Можно ли не выписывать знаки каждого из множителей на выделенных интервалах? Почему?

3) Можно ли обобщить полученные вами выводы для всех произведений множителей вида $(x-a)^n$? Сопоставьте свои выводы с правилом смены знаков, указанным на стр. 48.

177 Соотнесите неравенство со схемой его решения:

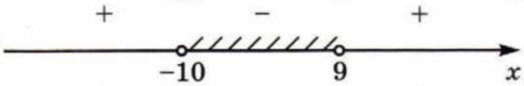
а) $(x-9)(x+10)>0$;

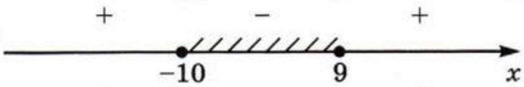
б) $(x-9)(x+10)<0$;

в) $(x-9)(x+10)\leqslant 0$;

г) $(x-9)(x+10)\geqslant 0$;

1) 

2) 

3) 

4) 

Запишите ответ к каждому из неравенств.

178 Соотнесите неравенство со схемой его решения:

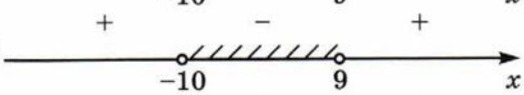
а) $(x-9)^3(x+10)<0$;

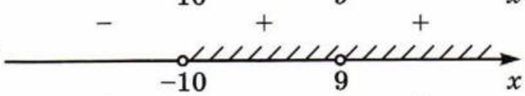
б) $(x-9)(x+10)^2<0$;

в) $(x-9)^2(x+10)>0$;

г) $(x-9)(x+10)^3>0$;

1) 

2) 

3) 

4) 

Запишите ответ к каждому из неравенств.

179 Решите неравенства:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)>0$;

б) $(x-3)^4(x+5)^5(x-7)<0$;

в) $(x+10)(x+9)^2(x+8)^4\geqslant 0$;

г) $(x-1)^4(x+2)^2(x+5)\leqslant 0$.

180 Решите неравенства:

а) $(x-1)(x^2-1)>0$;

б) $(x^2-4)^3(x-2)<0$;

в) $(x-9)^2(x^2-9)\leqslant 0$.

181 Решите целые неравенства:

а) $-x(3x^4+2x+5)<2-3x^5$;

б) $(x^3+27)(2x-4)\geqslant 0$.

Какой способ вы использовали при решении этих неравенств? Какие равносильные преобразования можно использовать при решении неравенств?

Составьте свой вариант алгоритма решения целых неравенств и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 49.

182 Решите неравенства:

а) $4x^3-20x^2>x-5$;

б) $x^3-4x^2-8x+8\leqslant 0$.

183 1) Сопоставьте неравенство $\dfrac{x+4}{x-3}\geqslant 0$ с неравенством $(x+4)(x-3)\geqslant 0$.

От чего зависит знак дроби? От чего зависит знак произведения?

Может ли $x=3$ являться решением первого неравенства? Почему?

2) Решите неравенство $\frac{x+4}{x-3} \geqslant 0$. Подойдет ли способ, использованный вами при решении этого неравенства, для решения любого дробно-рационального неравенства? Какие еще случаи возможны?

3) Составьте свой вариант алгоритма решения дробно-рациональных неравенств и сопоставьте его с алгоритмом на стр. 50.

184 Найдите верные утверждения:

а) $\frac{x+1}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \geqslant 0$;

б) $\frac{x+7}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+7)(x-1) \geqslant 0 \\ x-1 \neq 0\end{cases}$;

в) $\frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) < 0$;

г) $\frac{x+7}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+7)(x-1) < 0 \\ x-1 \neq 0\end{cases}$.

185 Решите дробно-рациональные неравенства:

а) $\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{x-1} \geqslant 0$;

б) $\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)} \geqslant 0$;

в) $\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{x-1} < 0$;

г) $\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)} > 0$.

186 Решите дробно-рациональные неравенства:

а) $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} > 0$;

б) $\frac{(x+1)^2(x-2)^5}{x-3} \leqslant 0$;

в) $\frac{(x-1)(x-2)^3(x-3)^2}{(x-4)^5(x-5)^4} \geqslant 0$;

г) $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{(x^2+x+1)(x+1)} > 0$.

187 Решите неравенства:

а) $\frac{8-x}{x-10} \leqslant \frac{2}{2-x}$;

б) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} > 2$.

188 Решите неравенство: $\frac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} > \frac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$.

189 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases}\frac{2-x}{x+1} \geqslant 1 \\ \frac{2-x}{x+2} \leqslant 2\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x} > \frac{3}{x-1} \\ |x-2| > 1\end{cases}$.

190 Решите задачу с помощью дробно-рационального неравенства:

На покупку сувениров для гостей запланировали потратить 450 руб. Позже выяснилось, что количество гостей увеличилось на 1. Сколько человек пришли в гости, если на сувениры была потрачена вся выделенная сумма, а разница между запланированной ранее и новой ценой сувенира составила не менее пяти рублей?

П **191** Решите уравнение методом замены неизвестного:

а) $6 \cdot \left(\frac{2x+3}{3x+2}\right)^2 - 13 \cdot \frac{2x+3}{3x+2} + 6 = 0$;

б) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$;

в) $\dfrac{1}{x+\dfrac{18}{x}-3}-\dfrac{1}{x+\dfrac{18}{x}+3}=\dfrac{1}{12}$.

192 Решите уравнение методом выделения целой части:

$$\frac{15x-58}{3x-12}-\frac{9x+38}{3x+12}=\frac{8x-39}{2x-10}-\frac{4x+21}{2x+10}.$$

193 Решите уравнение методом выделения целой части и замены неизвестного:

а) $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{x+10}{x+5}=4$; б) $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$.

194 Перепишите функции в виде кусочно-линейных, выделяя промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют своего знака.
Постройте графики этих функций и найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

а) $y=|2x-3|$ на отрезке $[0; 1{,}5]$;

б) $y=x-1-|x-1|$ на отрезке $[-1; 0]$;

в) $y=|x+2|+2|x-1|-x$ на отрезке $[-2; 2]$.

195 Разбейте на две группы следующие записи:

а) $x>2$ и $x>3$;

б) $x>2$ или $x>3$;

в) $\begin{cases} x>2 \\ x>3 \end{cases}$;

г) «число x больше двух» $\vee$ «число x больше 3»;

д) «число x больше двух» $\wedge$ «число x больше 3»;

е) $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Какие из них становятся истинными высказываниями при $x = 2{,}5$? при $x = 5$? при $x = 0$?

196 Найдите записи, равносильные записям в таблице. Поставив букву соответствующей записи в таблицу, вы узнаете фамилию французского философа XVII века, автора следующих слов: «*Образование – клад, труд – ключ к нему*».

А	$\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x\leqslant 1{,}5 \end{cases}$	**У**	$\left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>1{,}5 \end{array}\right.$	**С**	$x<1{,}5$ и $x<1$
Т	«число x не меньше 2» $\vee$ «число x не больше 3»				
Б	«число x не меньше 2» $\wedge$ «число x не больше 3»				

1)	2)	3)	4)	5)
$x\in(-\infty;3]\cap[2;+\infty)$	$x\in(-\infty;1)\cup(1{,}5;+\infty)$	$1\leqslant x\leqslant 1{,}5$	$\begin{cases} x<1{,}5 \\ x<1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} x\geqslant 2 \\ x\leqslant 3 \end{array}\right.$

Познакомьтесь и с другими высказываниями этого философа. Выберите то, с которым вы согласны, зашифруйте его для своих одноклассников с помощью математического содержания.

197 Решите системы линейных неравенств и выпишите все целые решения:

а) $\begin{cases} 6x+7{,}2>0 \\ 5{,}6 \geqslant 2{,}8x \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 17x-2<12x-1 \\ -3-9x<1-x \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-3}{3} \geqslant 2 \\ \dfrac{x}{2}-1>x \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 3a-1>4a-3 \\ 5a-1>6-2a \\ a-7 \leqslant 0 \end{cases}$.

198 Решите совокупности линейных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2(x-1)-3(x-2) \leqslant x \\ -6x-3 \leqslant 17-(x-5) \end{array}\right.$;

б) $\left[\begin{array}{l} 4-\dfrac{x-1}{3}>x \\ \dfrac{7x-1}{8} \geqslant 6 \end{array}\right.$;

в) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{5x-1}{6}-\dfrac{2x-2}{2}>0 \\ 1-\dfrac{x+4}{3}<0 \end{array}\right.$;

г) $\left[\begin{array}{l} b-4>8 \\ 2b+5>13 \\ 3-b>1 \end{array}\right.$.

199 Найдите область допустимых значений выражения:

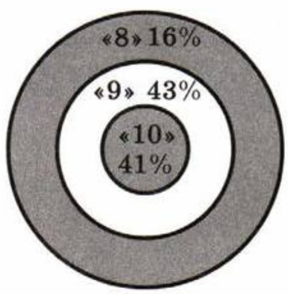
а) $\sqrt{12-4x}+\sqrt{-2x-1}$; б) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$; в) $\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x+1}}$.

200 Решите:

а) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-1<5 \\ 2x-5>7 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x-3 \geqslant 3 \\ 3-2x \geqslant 3(1-x) \end{array}\right. \end{cases}$;

б) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<15 \\ 3-6x>15 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-2 \leqslant 26 \\ 2x-1 \geqslant 11 \end{cases} \end{array}\right.$.

201 В отделе работают 6 человек: начальник отдела и 5 инженеров. Средняя заработная плата инженеров составляет 20 000 рублей в месяц, а средняя заработная плата всех сотрудников отдела составляет 25 000 рублей в месяц. Какова заработная плата начальника отдела?



202 На диаграмме показаны результаты стрельбы спортсмена по мишени (количество очков и процент попадания). Найдите среднее количество очков при одном выстреле спортсмена.

Д **203** Решите квадратные неравенства методом интервалов:

а) $x^2-3x+2>0$; в) $2x^2-3x-2 \geqslant 0$; д) $x^2-16x+64>0$;

б) $x^2-9x+20<0$; г) $3x^2+8x-3 \leqslant 0$; е) $4x^2+4x+1 \leqslant 0$.

204 Решите неравенства:

а) $(x+2)^5(x-3)^4(x+1)>0$; в) $(x+7)(x-3)^2(x+2)^5 \leqslant 0$;

б) $x^4(x-3)^3(x+11)<0$; г) $(x+5)^2(x+1)^4(x-7)^3 \geqslant 0$.

205 Решите неравенства:

а) $(x+2)(x^2-4)>0$; б) $(x^2-1)^5(x-1)^3<0$; в) $(x+25)^2(x^2-25)\leqslant 0$.

206 Решите неравенства:

а) $x(11x^3+5x+1)>7-x+11x^4$; б) $(x^3-1)(5x-3)\geqslant 0$.

207 Решите неравенства:

а) $4x^3+4x^2>x+1$; б) $x^3+3x^2-9x-27\leqslant 0$.

208 Решите неравенства:

а) $\dfrac{(x+5)(2x+3)}{x+4}>0$; в) $\dfrac{(x+1)(x-7)^5(x-4)^2}{(x+1)^2(x-2)^3}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^3}{(x+3)^2}\geqslant 0$; г) $\dfrac{x^3(x+2)^2(x-5)^5}{(x^2-2x+3)^3(x-1)^2}>0$.

209 Решите неравенства:

а) $\dfrac{5}{5-x}\geqslant\dfrac{x+1}{x-3}$; б) $\dfrac{4}{5+x}-\dfrac{3}{x-2}<2$.

210 Решите неравенство: $\dfrac{(x-2)^5(4x^2+2x-3)}{(x^2+2x+1)^3}\leqslant\dfrac{(x-2)^5(x^2-x+3)}{(x^2+2x+1)^3}$.

211 Решите уравнение методом замены неизвестного:

а) $2\cdot\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2-7\cdot\dfrac{x+3}{x-1}+5=0$; б) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$.

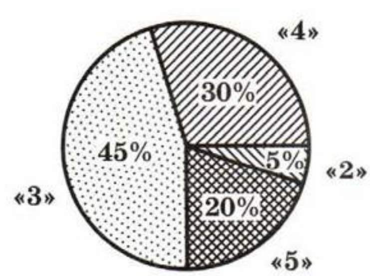
212 Решите системы линейных неравенств:

а) $\begin{cases}3x+7>(x+2)-(2x-1)\\ \dfrac{7-2x}{6}>\dfrac{3x-7}{12}\end{cases}$; б) $\begin{cases}5\leqslant x^2-x(x+1)\\ 3(2x-2{,}4)\geqslant 2(4{,}5-x)-56{,}2\end{cases}$.

213 Решите совокупности линейных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}2x-(x-4)<6\\ x>3(2x-1)+18\end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{1-x}{5}<x+1\\ x-\dfrac{7x-1}{4}\leqslant 1\end{array}\right.$.

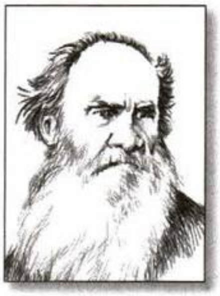
214 На диаграмме показаны результаты выпускного экзамена по математике (отметка и процент получивших ее учеников). Найдите средний балл, полученный выпускниками на этом экзамене.



С **215*** Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $x\geqslant\dfrac{200}{x}$.

216* Назовем число n^2-1 *почти квадратом* натурального числа n. Докажите, что произведение двух почти квадратов натуральных чисел всегда равно разности каких-то двух квадратов натуральных чисел.

2. Доказательство неравенств. Некоторые замечательные неравенства



...Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Л. Н. Толстой (1828–1910),
русский писатель, мыслитель

Решая неравенство, мы находим такие значения неизвестного, при которых данное неравенство становится истинным высказыванием. Однако существуют неравенства, истинные при любых значениях входящих в них букв. Простейшими примерами таких неравенств являются, например, неравенства:

$$a^2 \geqslant 0, \qquad |x| \geqslant 0, \qquad -y^2 - 1 < 0$$

Истинность данных неравенств очевидна. Первое следует из свойств произведения, второе – из определения модуля числа, а третье – из правил сложения действительных чисел.

Однако в большинстве случаев доказать истинность неравенства не так просто. В этом пункте мы будем учиться доказывать неравенства.

Введем несколько определений, которые нам потребуются.

***Определение* 1. Доказать неравенство** – это значит, обосновать, что оно выполняется при всех допустимых значениях входящих в него переменных (или для какого-то заданного множества их значений).

Мы знаем, что понятия «больше», «меньше», «равно» возникли в связи со счетом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Однако наглядные представления не достаточны для строгого доказательства буквенных неравенств. Поэтому сформулируем алгебраические определения соотношений «больше» и «меньше», основанные, тем не менее, на имеющемся у нас опыте сравнения и действий с числами, а именно: вычитая из большего числа меньшее, мы получаем положительное число, а из меньшего большее – отрицательное.

***Определение* 2.** Говорят, что число $\boldsymbol{a}$ **больше** числа $\boldsymbol{b}$, если разность $\boldsymbol{a - b}$ положительна и число $\boldsymbol{a}$ **меньше** числа $\boldsymbol{b}$, если разность $\boldsymbol{a - b}$ отрицательна.

Отсюда:

$$\forall\, a, b \in \boldsymbol{R}\colon a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

$$\forall\, a, b \in \boldsymbol{R}\colon a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

$$\forall\, a, b \in \boldsymbol{R}\colon a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$$

$$\forall\, a, b \in \boldsymbol{R}\colon a \leqslant b \Leftrightarrow a - b < 0$$

Данные утверждения помогут нам доказывать неравенства. Так для доказательства неравенства $P(x) > Q(x)$ на заданном множестве значений достаточно составить разность $P(x) - Q(x)$ и убедиться в том, что она положительна при любом x.

Разберемся с применением этого способа на следующем примере.

Пример 1.

Доказать неравенство $(a^2+1)^2 \geqslant a^4+1$.

Доказательство:

Перенесем все члены неравенства влево и докажем, что полученная разность $(a^2+1)^2-(a^4+1)$ неотрицательна.

Преобразуем полученное выражение:

$$(a^2+1)^2-(a^4+1)=a^4+2a^2+1-a^4-1=2a^2.$$

Полученное произведение $2a^2$ неотрицательно при любых значениях a, значит, $(a^2+1)^2 \geqslant a^4+1$, что и требовалось доказать. ■

В рассмотренном нами примере мы ссылались на то, что выражение $2a^2$ неотрицательно при любых значениях a. Этой идеей часто пользуются при доказательстве неравенств. Для этого все члены неравенства переносят в одну сторону и преобразуют полученное выражение к явно неотрицательному виду (к квадрату некоторого выражения или сумме нескольких квадратов).

Пример 2.

Доказать, что для любого положительного значения x выполняется неравенство $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2$ (сумма двух взаимно обратных положительных чисел не менее двух), причем равенство имеет место только при $x=1$.

Доказательство:

Рассмотрим разность:

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

Числитель дроби является квадратом двучлена, значит, ее знак зависит только от знаменателя. По условию $x>0$. На всем заданном множестве дробь положительна и обращается в нуль только при $x=1$, что и требовалось доказать. ■

Пример 3 (неравенство Коши-Буняковского).

Доказать, что для любых чисел a, b, c, d верно неравенство:

$$(ab+cd)^2 \leqslant (a^2+c^2)(b^2+d^2),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $ad=bc$, то есть когда пара чисел a, c пропорциональна паре чисел b, d.

Доказательство:

Рассмотрим разность $(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2$.

Преобразуем полученное выражение:

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2d^2+c^2d^2-a^2b^2-c^2d^2-2abcd=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2$$

Квадрат разности всегда неотрицателен и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $(ad-bc)^2=0$, то есть $ad=bc$.

Значит, исходное неравенство верно, что и требовалось доказать. ■

Для доказательства всех трех приведенных неравенств использовался один и тот же метод. Представим его в обобщенном виде.

При доказательстве неравенства можно выполнять следующие шаги:

1) составить разность левой и правой частей неравенства;

2) с помощью равносильных преобразований привести полученную разность к выражению, знак которого очевиден;

3) сделать вывод о выполнении исходного неравенства.

В математике есть так называемые «замечательные неравенства», которые помогают доказывать другие неравенства. Многие из них связаны с понятием *среднего* двух чисел. Мы уже знаем, что число $\frac{a+b}{2}$ называется **средним арифметическим** двух чисел a и b. Познакомимся еще с одним средним двух чисел – *средним геометрическим*.

***Определение* 3. Средним геометрическим** (или средним пропорциональным) двух неотрицательных чисел a и b называется число $\sqrt{ab}$.

Установим неравенство, связывающее эти средние значения.

1. Среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство:

Составим разность левой и правой частей неравенства и выполним преобразования:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geqslant 0$$

Значит, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. При этом данное нестрогое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, то есть $a = b$, что и требовалось доказать. ■

Рассмотрим пример доказательства неравенства, в котором применяется доказанное нами соотношение между средними значениями.

Пример 4.

Доказать, что неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 4$ справедливо для любых положительных чисел a, b, c, d.

Доказательство:

Рассмотрим левую часть неравенства. Применим к первому и третьему, а затем ко второму и четвертому слагаемому неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Получим:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} \text{ и } \frac{b}{c}+\frac{d}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{bd}{ac}}.$$

Теперь применим то же неравенство к числам $\sqrt{\frac{ac}{bd}}$ и $\sqrt{\frac{bd}{ac}}$:

$$\sqrt{\frac{ac}{bd}}+\sqrt{\frac{bd}{ac}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{ac}{bd}}\sqrt{\frac{bd}{ac}}}=2\sqrt{\sqrt{\frac{abcd}{abcd}}}=2\sqrt{1}=2.$$

Значит, $\sqrt{\frac{ac}{bd}}+\sqrt{\frac{bd}{ac}} \geqslant 2$. Отсюда,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}=2\left(\sqrt{\frac{ac}{bd}}+\sqrt{\frac{bd}{ac}}\right) \geqslant 2\cdot 2=4$$

Таким образом, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 4$, что и требовалось доказать. ■

Зафиксируем способ доказательства, который был использован в данном примере.

Для доказательства неравенства можно **оценивать части неравенства, используя ранее доказанные неравенства.**

* * *

Познакомимся с еще несколькими неравенствами для средних. Для этого введем следующие определения.

***Определение* 4.** **Средним гармоническим** двух положительных чисел a и b называется число $\frac{2ab}{a+b}$.

***Определение* 5.** **Средним квадратичным** двух положительных чисел a и b называется число $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Легко видеть, что если $a = b$, то все рассмотренные нами средние значения равны общему значению a и b. Если $a \neq b$ (пусть для определенности $a < b$), то на числовой прямой все эти средние значения расположены между числами a и b.

Докажем это на примере среднего гармонического.

Пример 5.

Доказать, что среднее гармоническое чисел a и b, где $0 < a < b$, расположено между этими числами:

$$a<\frac{2ab}{a+b}<b$$

Доказательство:

Составим разность левой и правой частей каждого из двух искомых неравенств и выполним преобразования.

$$\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{2ab-a^2-ab}{a+b}=\frac{ab-a^2}{a+b}=\frac{a(b-a)}{a+b}>0,$$

$$b-\frac{2ab}{a+b}=\frac{ab+b^2-2ab}{a+b}=\frac{b-ab^2}{a+b}=\frac{b(b-a)}{a+b}>0$$

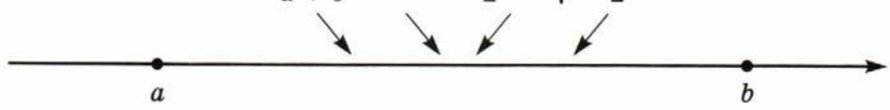
В обоих случаях мы получили положительные разности, так как все множители в числителе и знаменатели положительны.

Значит, $a<\frac{2ab}{a+b}<b$, что и требовалось доказать. ■

Остальные неравенства о расположении среднего арифметического, среднего геометрического и среднего квадратичного этих чисел a и b между этими же числами попробуйте доказать самостоятельно.

Естественно задаться вопросом, в каком же порядке располагаются эти средние на числовой прямой. Оказывается, для любых неотрицательных[3] чисел a и b имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



Соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим мы уже рассмотрели. При доказательстве остальных неравенств мы будем использовать то, что для неотрицательных чисел m, n справедливо следующее равносильное преобразование:

$$m < n \Leftrightarrow m^2 < n^2$$

Другими словами, *если обе части неравенства неотрицательны, то при их возведении в квадрат получится равносильное неравенство.*

Сравним сначала среднее арифметическое и среднее квадратичное, а затем – среднее гармоническое и среднее геометрическое.

2. Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего квадратичного:

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство:

Так как обе части неравенства неотрицательны, то при возведении в квадрат получим неравенство, равносильное исходному:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$$

Составим разность и приведем ее к выражению, знак которого очевиден:

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0$$

Значит,

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$, что и требовалось доказать.

3. Среднее гармоническое двух положительных чисел не превосходит их среднего геометрического:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство:

Так как обе части неравенства неотрицательны, то

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab$$

[3] Левое из неравенств имеет место для любых положительных чисел a и b.

Составим разность и приведем ее к выражению, знак которого очевиден:

$$ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} = \frac{ab\left(a^2+2ab+b^2\right)-4a^2b^2}{(a+b)^2} = \frac{ab\left(a^2+2ab+b^2-4ab\right)}{(a+b)^2} = \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \geqslant 0$$

Значит,

$$\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$$

Так как $a > 0$ и $b > 0$, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$, что и требовалось доказать. ■

Зафиксируем способ доказательства, который мы использовали в последних примерах и который может быть полезен при доказательстве разнообразных неравенств.

При доказательстве неравенства можно **заменять неравенство другим равносильным ему неравенством.**

Замечание. Вообще, одно и то же неравенство часто может быть доказано несколькими способами. В математике, как и в жизни, ценится тот способ, который позволяет достичь цели путем наименьших затрат.

Так, например, последнее неравенство можно доказать гораздо проще:

$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}$ | разделим обе части неравенства на $\sqrt{ab}$ $\left(\sqrt{ab} > 0\right)$;

$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leqslant 1$ | умножим на $\frac{a+b}{2}$ ($\frac{a+b}{2} > 0$, так как $a > 0$ и $b > 0$ по условию);

$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (истинно).

Истинность полученного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим позволяет утверждать, что и исходное неравенство верно.

В заключение заметим, что классические средние, рассмотренные нами в этом пункте, были известны еще античным математикам. Они играли большую роль, например, в древнегреческой теории музыки. Однако неравенства для средних и сами средние применяются до сих пор, причем не только в алгебре и геометрии, но и в других науках, например в статистике при обработке результатов измерений.

К **217** Укажите множество значений a, при которых неравенство обращается в истинное утверждение:

а) $1 - a < 5$; б) $\frac{a}{9} \leqslant \frac{1}{3}$; в) $a^2 + 3 > 0$; г) $(a - 4)(a + 3) \geqslant 0$.

218 Какое из неравенств отличается от остальных? Приведите еще один пример неравенства, которое истинно при любых значениях входящих в него букв.

Сравните числа:

а) 2 и 5; б) −5 и −2; в) $\sqrt{c}$ и $2\sqrt{c}$; г) a^2 и a^4.

Найдите разность этих чисел. Что вы замечаете?

Объясните, когда число a *меньше* числа b на математическом языке.

Сформулируйте алгебраическое определение соотношений «меньше» и «больше». Сопоставьте свой вариант с определением на стр. 58.

219 Докажите неравенство $(a^2+2)^2 > a^4+1$, используя введенное определение «больше». Сформулируйте шаги этого метода доказательства неравенств и сопоставьте его с вариантом, изложенным на стр. 60.

220 Докажите неравенство:

а) $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$;   б) $2xy - x^2 \leqslant y^2$.

221 Докажите неравенство $1+x \leqslant 2\sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$.

222 Докажите неравенство $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{4}{x+y}$ при $x, y > 0$.

223 Докажите неравенство $2\left(x^2+y^2\right) \geqslant (x+y)^2$.

224 Найдите среднее арифметическое следующих чисел:

а) 2 и 4;   б) 200 и 300;   в) 0,6 и 0,7;   г) a и b.

Как расположено среднее арифметическое двух чисел по отношению к этим числам на числовой прямой? Запишите это свойство среднего арифметического с помощью двойного неравенства (пусть для определенности $a < b$).

Докажите это неравенство.

225 Познакомьтесь с другими средними, описанными на стр. 60–61. Сформулируйте и докажите для них свойства, аналогичные свойству среднего арифметического.

226 В одном из древних математических текстов, автором которых считается древнегреческий математик Архит (ок. 428–365 гг. до н.э.), среднее арифметическое m, среднее геометрическое g и среднее гармоническое h определялись как равные средние члены соответственно арифметической, геометрической и гармонической «пропорций»:

$$a - m = m - a; \quad a : g = g : a; \quad (a-h) : a = (h-b) : b.$$

Получите из этих «древних» равенств современные равенства, определяющие описанные Архитом средние.

227* Докажите для неотрицательных чисел двойное неравенство

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx \geqslant x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}.$$

П **228** Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-7)(x+10)>0$;

б) $(x+3)(x-1)(5-x)<0$;

в) $-4x+8x(4+x) \geqslant (3x-4)(3x+4)+4(7x-5)$;

г) $-3x^2+4x+4 \leqslant 0$;

д) $(x-3)^2(x-5)(x+8)(x-6)>0$;

е) $x^2(x-4)(x+2)(x+5) \leqslant 0$.

229 Решите неравенство:

а) $\left(x^2-4\right)\left(x^2+x-2\right) \leqslant 0$;

б) $\left(x^2-7x+12\right)\left(3x-x^2-7\right)>0$;

в) $(x+6)(x+1)(x-2)^3(3-x)^2(8-x) \leqslant 0$.

230 Решите дробно-рациональное неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{5x-12}{5x+12} \leqslant 0$;

б) $\dfrac{(x+3)(4-x)(2x+5)}{(3x-1)(x+4)} \geqslant 0$;

в) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(1-5x)(x+2)^6(x-8)} < 0$;

г) $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(x^2-5x+6)}{x+3} \geqslant 0$.

231 Найдите число целых решений неравенства $\dfrac{x+2}{x} - \dfrac{3}{x-2} \leqslant 0$.

232 Найдите область допустимых значений выражения:

а) $\sqrt{(x^2-16)(8-3x)}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1-4x+4x^2}{x^2-9}}$.

233 Найдите целое положительное значение a, при котором множество решений неравенства $(1-x)(x-a) \geqslant 0$ содержит пять целых решений.

234 Расположив числа по убыванию, прочитайте русскую народную поговорку:

$1-\sqrt{2}$	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{6}{7}$	$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	$\dfrac{12}{11}$	$\sqrt{2}$	$\dfrac{11}{10}$
сладок	**его**	**плод**	**да**	**горек**	**корень**	**ученья**

235 Сравните числа a и b, если известно, что:

а) $a + 4{,}5 = b + 4{,}5$;

б) $a = b + \sqrt{2}$;

в) $a - 3 = b - 5$;

г) $a + \sqrt{3} = b - \sqrt{3}$;

д) $a : 5 = b$;

е) $a = 0{,}5b$;

ж) $5a = 2b$;

з) $\dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{2}$.

236 Множества M и N заданы числовыми промежутками:

а) $M = (-8; 2)$, $N = (-1; 8]$;

б) $M = \left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$, $N = (-\infty; -\sqrt{7}\,]$.

Найдите $M \cup N$, $M \cup N$.

237 Решите системы неравенств, содержащие модуль:

а) $\begin{cases} |x-6| \leqslant 7 \\ 2x-3 \geqslant 7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 14{,}2-2x > 10-x \\ 8 \geqslant -4x \\ |x-4| < 1 \end{cases}$.

238 Решите систему неравенств, содержащую модуль, графическим способом:

а) $\begin{cases} |x-2| \leqslant 5 \\ |x-4| \geqslant 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} |x|+x-2 \leqslant 0 \\ |x-1|+|x-2|-3 > 0 \end{cases}$.

239 Найдите область допустимых значений выражения:

а) $\sqrt{7-|x|} \cdot \sqrt{x+6}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5x-6}}{\sqrt{|x-2|-2}}$.

240 В таблице приведены данные о добыче угля на одном из российских месторождений:

Номер шахты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество добытого угля за смену (в т)	12	8	9	9	8	8	9	12	11	8

Найдите:

а) среднее количество добытого угля за смену в шахтах этого месторождения;

б) моду набора значений количества угля;

в) медиану набора значений количества угля.

Д **241** Докажите, что при $a \neq 0$ выполняется неравенство

$$a^2 + \frac{16}{a^2} \geqslant 8.$$

242 Докажите неравенство $\dfrac{1+8x}{1+8x^2} \leqslant 2$.

243 Докажите неравенство $2\left(x^2+y^2\right) \geqslant (x-y)^2$.

244 Решите дробно-рациональное неравенство методом интервалов:

а) $\dfrac{2-3x}{2+3x} \geqslant 0$; б) $\dfrac{3x^2-9x}{-2x^2+3x+2} < 0$; в) $\dfrac{x(x-3)^2(x+7)^5(4x+1)}{(x-4)(x+5)^4} \geqslant 0$.

245 Решите системы неравенств, содержащие модуль:

а) $\begin{cases} |x-2| < 5-x \\ 2x-9 \leqslant 7x-14 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |3-x| \geqslant 1 \\ -10 < 2x+4 \\ 28-7x \geqslant 21-6x \end{cases}$.

246 В таблице приведены данные о возрастном составе участников школьных соревнований:

Возраст (сколько лет)	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Число участников	1	2	3	6	5	3	2	2	1

Найдите:

а) средний возраст участников соревнований;

б) моду набора значений возраста участников соревнований;

в) медиану набора значений возраста участников соревнований.

С **247*** Докажите неравенство $x^4+y^4+8 \geqslant 8xy$.

248* Даны действительные числа a, b, c, причем $a > b > c$. Докажите неравенство

$$a^2b+b^2c+c^2a > b^2a+a^2c+c^2b.$$

249* Докажите неравенство $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$ при $x, y, z \geqslant 0$.

3*. Задачи на максимум и минимум

Еще почти никогда ... не бывало, чтобы та самая голова, которая впервые натолкнулась на ту или иную новую идею, до конца исчерпала бы ее.

Л. Э. Больцман (1844–1906),
австрийский физик,
иностранный почетный член Петербургской АН

При изучении квадратного трехчлена мы научились находить его наибольшее и наименьшее значение. Однако практические задачи требуют умения оценивать значения и других выражений. В этом пункте мы познакомимся с новым способом решения задач на максимум и минимум.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Чтобы огородить участок земли под посадку клубники, купили сетку длиною P метров. Какую максимальную площадь может иметь огороженный участок, если он должен иметь прямоугольную форму? Как в этом случае следует расположить изгородь?

Решение:

Данную задачу можно переформулировать следующим образом: «Найти наибольшую возможную площадь прямоугольника, если периметр его равен P».

Обозначим стороны прямоугольника a и b метров, тогда $P = 2\,(a + b)$ м, а площадь прямоугольника $S = ab$ м^2. Нам необходимо установить наибольшее значение произведения чисел ab при постоянной их сумме $a+b=\frac{P}{2}$.

Применим к длинам сторон прямоугольника неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Для рассматриваемых в задаче величин оно означает $\frac{P}{4} \geqslant \sqrt{S}$. Выполним равносильные преобразования (по условию $P > 0$):

$$\frac{P}{4} \geqslant \sqrt{S} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{S} \leqslant \frac{P}{4} \;\Leftrightarrow\; S \leqslant \frac{P^2}{16}.$$

Мы получили неравенство, в котором зафиксирована оценка площади: $S \leqslant \frac{P^2}{16}$. Нестрогое неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом обращается в равенство, если числа, среднее значение которых мы находили, равны. Значит, свое максимальное значение $\frac{P^2}{16}$ площадь принимает при $a = b$, то есть в случае, когда прямоугольник является квадратом со стороной $\frac{P}{4}$ м.

Ответ: сетка длиною P м позволяет огородить участок максимальной площади $\frac{P^2}{16}$ м^2. Сетку следует обнести вокруг участка квадратной формы со стороной $\frac{P}{4}$ м.

Как мы видим, в некоторых случаях **задача нахождения наибольшего или наименьшего значения выражения решается с помощью уже известных неравенств** (например, доказанного нами в предыдущем пункте неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим).

Решим теперь с помощью этого неравенства несколько задач на максимум и минимум и, выявив особенности этого решения, сформулируем способ нахождения наибольшего (наименьшего) значения выражений.

Пример 1.

Найти наименьшее значение выражения $x+\frac{9}{x}$ при $x>0$.

Решение:

Применим к числам x и $\frac{9}{x}$ неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x+\frac{9}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}} \;\Leftrightarrow\; x+\frac{9}{x}\geqslant 2\sqrt{9} \;\Leftrightarrow\; x+\frac{9}{x}\geqslant 6\,.$$

Мы получили неравенство $x+\frac{9}{x}\geqslant 6$, в котором зафиксирована оценка суммы. Оно говорит о том, что любое значение суммы, в том числе и наименьшее, не меньше 6. Но не дает информации, каким является наименьшее значение: 6, 9, 25, 1000? А в этом как раз и состоит вопрос задачи.

Для ответа на этот вопрос воспользуемся вновь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Мы знаем, что оно обращается в равенство, если числа, средние которых находят, равны. Значит, наше равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=\frac{9}{x}$, то есть при $x^2=9$. Так как $x>0$, то $x=3$.

Ответ: наименьшее значение достигается при $x=3$ и равно 6.

Итак, при решении задач на наибольшие и наименьшие значения **нужно точно устанавливать, при каких значениях переменных полученное нестрогое неравенство обращается в равенство (или доказать, что такие значения переменных существуют).** Иначе можно получить неверный ответ. Так, например, при всех $x>0$ выполняется неравенство $x+\frac{9}{x}\geqslant 1$, но наименьшее значение этого выражения равно не единице, а шести.

Пример 2.

Найти наименьшее значение выражения $\frac{(x+2)(x+3)}{x}$ при $x>0$.

Решение:

Преобразуем данное выражение так, чтобы к нему можно было применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

$$\frac{(x+2)(x+3)}{x}=\frac{x^2+5x+6}{x}=x+\frac{6}{x}+5.$$

Теперь к числам x и $\frac{6}{x}$ мы можем применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

При всех $x>0$ имеет место неравенство:

$$x+\frac{6}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{6}{x}}=2\sqrt{6}\,.$$

Значит, $x+\frac{6}{x}+5 \geqslant 2\sqrt{6}+5$. Причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=\frac{6}{x}$, то есть при $x=\sqrt{6}$. Значит, наименьшее значение равно $2\sqrt{6}+5$.

Ответ: наименьшее значение выражения $\frac{(x+2)(x+3)}{x}$ при $x > 0$ равно $2\sqrt{6}+5$ и достигается при $x=\sqrt{6}$.

Как мы видим, в некоторых случаях, чтобы применить известное неравенство **исходное выражение следует преобразовать.**

Итак, мы приходим к следующему способу нахождения наименьшего (наибольшего) значения выражения.

Чтобы найти наименьшее (наибольшее) значение выражения $P(x)$, можно:

1) преобразовать выражение $P(x)$ так, чтобы его значение можно было оценить с помощью известных неравенств;
2) получить оценку выражения в виде нестрогого неравенства $P(x) \geqslant k$ $(P(x) \leqslant k)$, где k – некоторое число;
3) найти значения переменной x, при котором имеет место равенство $P(x) = k$ (или доказать, что такое значение x существует);
4) записать, что наименьшее (наибольшее) значение $P(x)$ равно k.

Рассмотрим несколько примеров применения полученного нами способа.

Пример 3.

Найти наименьшее значение выражения $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$.

Решение:

1) Преобразуем выражение так, чтобы его значение можно было оценить с помощью уже известных нам неравенств:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=\frac{x^4+2x^2+1-x^2-1+1}{x^2+1}=\frac{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}-1$$

2) Так как $x^2+1>0$ при всех значениях x, то из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что $x^2+1+\frac{1}{x^2+1} \geqslant 2$. Тогда $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}-1 \geqslant 2-1=1$.

3) Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x^2+1=\frac{1}{x^2+1}$.

$$x^2+1=\frac{1}{x^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+1)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

Ответ: наименьшее значение $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$ равно 1 и достигается при $x=0$.

Заметим, что это значение можно было найти и проще. Преобразовав алгебраическую дробь в сумму двух дробей и выполнив сокращение, получим:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}=1+\frac{x^4}{x^2+1} \geqslant 1$$

Равенство достигается, когда числитель дроби $\frac{x^4}{x^2+1}$ равен нулю, то есть при $x=0$.

Пример 4.

Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{x^2+3x+16}$ при $x > 0$.

Решение:

Рассмотрим дробь, обратную данной $\dfrac{x^2+3x+16}{x} = x + \dfrac{16}{x} + 3$.

Аналогично рассмотренным выше примерам при всех $x > 0$ выполняется неравенство $x + \dfrac{16}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{16}{x}} = 8$. Значит, $\dfrac{x^2+3x+16}{x} = x + \dfrac{16}{x} + 3 \geqslant 8 + 3 = 11$.

Равенство имеет место при $x = \dfrac{16}{x}$, то есть $x = 4$.

Тогда для обратной положительной величины при $x = 4$ имеем: $\dfrac{x}{x^2+3x+16} \leqslant \dfrac{1}{11}$.

Ответ: наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{x^2+3x+16}$ при $x > 0$ равно $\dfrac{1}{11}$ и достигается при $x = 4$.

* * *

Пример 5.

Найти наименьшую возможную длину диагонали прямоугольника, если площадь его равна S.

Решение:

Пусть длины сторон прямоугольника равны a и b. Тогда длина диагонали d по теореме Пифагора равна $\sqrt{a^2+b^2}$, а площадь $S = ab$. Применим к длинам сторон неравенство между средним квадратичным и средним геометрическим:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{ab}$$

Для рассматриваемых в задаче величин оно означает:

$$\frac{d}{\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{S}$$

Равенство имеет место при $a = b$, то есть когда прямоугольник является квадратом.

Ответ: если площадь прямоугольника равна S, то наименьшую возможную длину диагонали, равную $\sqrt{2S}$, имеет квадрат со стороной $\sqrt{S}$.

К **250** Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

а) 4 и 9; б) 5 и 20; в) 100 и 100; г) 33 и 55.

Сравните полученные в каждом случае значения. Какое свойство позволяет ответить на этот вопрос без всяких вычислений?
В каком случае среднее арифметическое равно среднему геометрическому?

251 Прямоугольник имеет стороны a и b, периметр P и площадь S. Запишите среднее арифметическое сторон этого прямоугольника, выразите его через периметр прямоугольника P. Запишите среднее геометрическое сторон этого прямоугольника, выразите его через площадь прямоугольника S.

252 1) Найдите наибольшую возможную площадь прямоугольника, периметр которого равен P. Какое из «замечательных неравенств» может в этом помочь?

2) Сопоставьте свой способ решения этой задачи с решением на стр. 67.

3) Сформулируйте еще один способ, с помощью которого можно решить задачу на максимум и сопоставьте его с изложенным на стр. 69.

253 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{4x^2+25x^2+100}{x^2}$.

254 Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{3x^2+x+27}$ при $x>0$.

П **255** Докажите неравенство:

а) $a^2-ab+b^2 \geqslant 0$; б) $(b+1)(3-b)<5$; в) $-a^2+8ab-17b^2<0$.

256 Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $5x+2y+2 \geqslant 0$; б) $-x+y-8<0$; в) $4y-1<0$.

257 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} -x-y \geqslant 0 \\ -x+y \leqslant 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+2<0 \\ x+y-4 \geqslant 0 \end{cases}$.

258 Записан рост (в сантиметрах) шести учащихся восьмого класса: 160, 166, 158, 172, 164, 170. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

259 Фирма изготавливает и продает футболки с логотипом предстоящего спортивного праздника. Стоимость заказа из 20 футболок составляет 1000рублей, а заказа из 50 футболок – 2250 рублей. На сколько процентов стоимость одной футболки при заказе 20 штук дороже, чем при заказе 50 штук? (Ответ округлите до целого числа процентов.)

Д **260** Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

а) 6 и 24; б) 8 и 32; в) 5 и 45; г) 111 и 444.

Придумайте пару чисел, среднее арифметическое которых совпадает со средним геометрическим.

261 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^4+4x^2+4}{x^2}$.

262 Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{x^2+x+1}$ при $x>0$.

263 Докажите неравенство:

а) $4a^2+25b^2 \geqslant 20ab$; б) $a^2+2b^2+c^2 \geqslant 2b(a+c)$; в) $b^2+6>2b$.

264 Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $4x-8y-1 \leqslant 0$; б) $-x-y+3>0$; в) $5x+5>0$.

С **265*** Что больше $123\,456\,789 \cdot 123\,456\,787$ или $123\,456\,788^2$?

266* Какое наименьшее количество чисел нужно исключить из набора 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковым произведением чисел в группах? Приведите пример такого разбиения на группы.

Экспресс-тест № 8

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Укажите число, удовлетворяющее неравенству

$$(x-1)(x+2)(3-x) \leqslant 0.$$

А) $-2,1$; Б) $-\frac{5}{9}$; В) $1,6$; Г) $2,9$.

№ 2			
1	2	3	4

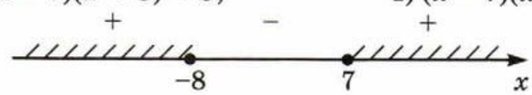
№ 2. Соотнесите неравенство со схемой его решения:

1) $(x-7)(x+8) > 0$;

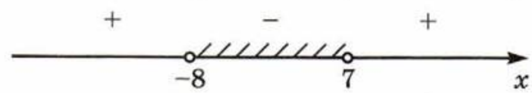
2) $(x-7)(x+8) < 0$;

3) $(x-7)(x+8) \leqslant 0$;

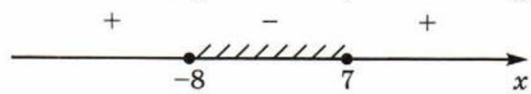
4) $(x-7)(x+8) \geqslant 0$.

А) 

;

Б) 

;

В) 

;

Г) 

.

№ 3

№ 3. Какое из неравенств не имеет решения?

А) $2x^2-5x+2<0$;

Б) $x^2-4x-45 \geqslant 0$;

В) $16x^2-24x+9 \leqslant 0$;

Г) $3x^2+6x+12<0$?

№ 4			
1	2	3	4

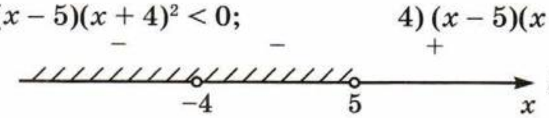
№ 4. Установите соответствие между неравенством и схемой его решения:

1) $(x-5)^3(x+4) < 0$;

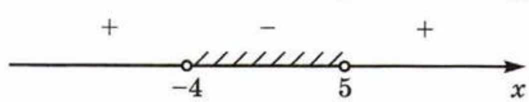
2) $(x-5)(x+4)^2 < 0$;

3) $(x-5)^2(x+4) > 0$;

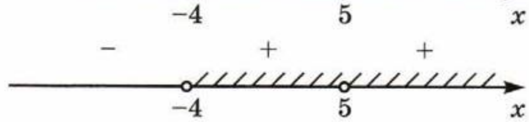
4) $(x-5)(x+4)^3 > 0$.

А) 

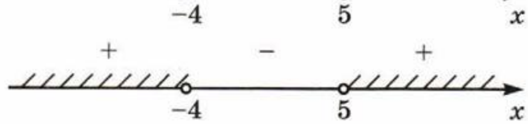
;

Б) 

;

В) 

;

Г) 

.

№ 5

№ 5. Решите дробно-рациональное неравенство $\frac{(x-4)(x+1,5)}{x^2-16} \geqslant 0$:

А) $(-4;\ -1,5] \cup (4;\ +\infty)$;

Б) $(-\infty;\ -4) \cup [-1,5;\ +\infty)$;

В) $(-\infty;\ -4) \cup [-1,5;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$;

Г) $(-4;\ 1,5]$.

Часть В

№ 6

№ 6. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 25-x^2 \geqslant 0 \\ \dfrac{5}{x+4} \geqslant x \end{cases}$

А) $\{-5\} \cup (-4;\ 1]$; В) $[-5;\ 4) \cup [5;\ +\infty)$;

Б) $(-\infty;\ -5]$; Г) $\{-5\} \cup [5;\ +\infty)$.

№ 7. Докажите неравенство $(m-1)(m-5) \leqslant (m-3)^2$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{(x+3)(x+8)}{x}$ при $x > 0$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2				№ 3	№ 4				№ 5	№ 6
	1	*2*	*3*	*4*		*1*	*2*	*3*	*4*		
Б	*Г*	*Б*	*В*	*А*	*Г*	*Б*	*А*	*В*	*Г*	*В*	*А*

№ 7

$(m-1)(m-5) \leqslant (m-3)^2$.

Доказательство:

$(m-1)(m-5)-(m-3)^2 = m^2-6m+5-m^2+6m-9 = -4 < 0$ при любых действительных значениях m.

№ 8

Преобразуем данное выражение так, чтобы к нему можно было применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

$\dfrac{(x+3)(x+8)}{x} = \dfrac{x^2+11x+24}{x} = x+\dfrac{24}{x}+11$.

Теперь к числам x и $\dfrac{24}{x}$ мы можем применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

При всех $x > 0$ имеет место неравенство: $x+\dfrac{24}{x} \geqslant 2\cdot\sqrt{x\cdot\dfrac{24}{x}} = 4\sqrt{6}$.

Значит, $x+\dfrac{24}{x}+11 \geqslant 4\sqrt{6}+11$. Причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=\dfrac{24}{x}$, то есть при $x=2\sqrt{6}$. Значит, наименьшее значение равно $4\sqrt{6}+11$.

Ответ: наименьшее значение выражения $\dfrac{(x+3)(x+8)}{x}$ при $x > 0$ равно $4\sqrt{6}+11$ и достигается при $x=2\sqrt{6}$.

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично;*
7–8 баллов – *хорошо;*
5–6 баллов – *удовлетворительно.*

Задачи для самоконтроля к Главе 5

267 Найдите области определения алгебраических дробей:

а) $\frac{x+5}{x(x-5)}$; б) $\frac{x}{9x^2-4}$; в) $\frac{2x-1}{4x^2+4x+1}$; г) $\frac{x-2}{x^3-8}$.

268 Сократите алгебраическую дробь:

а) $\frac{40(a^2b)^3}{72a^3b^4}$; б) $\frac{9m}{3m^2-9m}$; в) $\frac{n^2-36}{2n^2+12n}$; г) $\frac{5t-10}{5t^2-20t+20}$.

269 Выполните действия:

а) $\frac{2+3d}{14d}+\frac{d-3}{21d}$; б) $\frac{7}{x+3}-\frac{7}{x-3}$; в) $5-\frac{5v}{v-4}+\frac{5v-20}{v^2-8v+16}$.

270 Выполните действия:

а) $-\frac{72k^6}{p^8}\cdot\frac{p^4}{12k^6}$; г) $\frac{8a-b}{2a+3b}:\frac{16a-2b}{9b^2+12ab+4a^2}$;

б) $\frac{q-4s}{s-q}\cdot\frac{q^2-s^2}{20s-5q}$; д) $\frac{y^3+64}{y+8}:\frac{y^2+8y+16}{y^2+12y+32}$;

в) $\frac{p^2-4p-21}{p^2}\cdot\frac{p^6}{p-7}$; е) $\frac{z^2+4z-21}{z}\cdot\frac{z}{9-6z+z^2}:\frac{14+2z}{z}$.

271 Упростите выражение и найдите его значение при $x=\sqrt{5}+5$ и $y=\sqrt{5}-5$:

$$\left(\frac{2}{x-y}+\frac{2}{x+y}\right):\frac{x}{x^2+y^2-2xy}.$$

272 При каких значениях x, где $x \in \boldsymbol{Z}$, алгебраическая дробь является целым числом?

а) $\frac{2x+4}{x-1}$; б) $\frac{5x^2+x-10}{x+2}$.

273 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{3x^2-21x}{x-1}=0$; б) $\frac{2x+3}{x-1}=\frac{x+1}{x}$; в) $\frac{4}{x+1}-\frac{1}{x}=1$.

274 Решите дробно-рациональное уравнение:

а) $\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x}{x+1}$; б) $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{1}{x^2-x}$.

275 Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{x^2+9x-36}{x+a}=0$ имеет единственный корень.

276 Решите задачи, составив дробно-рациональное уравнение:

а) Расстояние между пристанями равно 84 км. По течению реки катер прошел это расстояние на 1 час быстрее, чем обратный путь. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

б) Моторная лодка рыбоохранной службы, выйдя на дежурство, прошла 8 км против течения и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 минут меньше, чем на движение против течения. Определите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 2 км/ч.

в) От пристани отправился по течению плот. Через 5ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Найдите скорость движения плота, если известно, что моторная лодка двигалась на 12 км/ч быстрее, чем плот?

г) Через две трубы $\frac{4}{5}$ бассейна заполняется за 8 часов. За сколько часов наполнит бассейн первая труба, если она это делает на 15 часов быстрее второй трубы?

д) Поезд был задержан в пути на 12 минут. Чтобы наверстать потерянное время, машинист увеличил скорость на 10 км/ч и на отрезке пути в 40 километров ликвидировал отставание. С какой скоростью поезд должен был идти по расписанию?

277 Решите уравнение:

$x^2-4x+\frac{15}{x^2-4x}=8.$

278 Решите уравнение:

а) $\left(\frac{x^2+20}{x}\right)^2-18=\frac{7x^2+140}{x}$; б) $4\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2=5.$

279 Решите неравенства методом интервалов:

а) $(x-5)(x+1)>0$; г) $-x(-0{,}5-x)\leqslant 0$;

б) $x(x+4)\leqslant 0$; д) $x^2-12x+27\geqslant 0$;

в) $(4-x)(x-8)>0$; е) $-3x^2+5x-2>0$.

280 Решите систему неравенств: $\begin{cases}x^2-10x-24<0\\2x-16>0\end{cases}.$

281 Решите двойное неравенство: $5x-20\leqslant x^2\leqslant 8x$.

282 Решите неравенства методом интервалов:

а) $(x-4)^5(x-1)^2(7-x)<0$; б) $(x-3)^2(x+1)^3(x-5)\geqslant 0$.

283 Решите неравенства методом интервалов:

а) $\frac{(x-1)^4(x-9)}{x(x+9)^3}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2+2x-48}{x(x-6)}\geqslant 0$; в) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x}<\frac{3}{x-1}$.

284 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\frac{x}{x-1}>2\\\frac{1-x}{x-2}\geqslant 1\end{cases}$; б) $\begin{cases}\frac{2x-5}{x^2-7x+10}<0\\|2x-5|\geqslant 1\end{cases}.$

285 Докажите неравенство $a^2+b^2-8a+6b+26>0$ при любых значениях a и b.

286 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^4+16x^2+16}{x^2}$.

Глава 6
Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики

§ 1. Элементы комбинаторики

1. Задача систематического перебора вариантов

О сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг...

Александр Пушкин, (1799 – 1837)
великий русский поэт, драматург и прозаик

На практике нам часто бывает нужно решать задачи, связанные с перебором вариантов, чтобы узнать их количество, или чтобы из среди всех возможных комбинаций выбрать оптимальную по некоторым заданным признакам. Например, играя в шашки, шахматы или какую-нибудь компьютерную игру требуется выбирать ходы, ведущие к выигрышу.

Мы уже знаем, что при решении таких задач перебор следует осуществлять не случайным образом, а *систематически*, по определенному правилу. При этом часто помогают инструменты, известные нам еще из начальной школы – таблица и схема, которую мы называли «дерево» возможных вариантов.

Обобщим имеющиеся у нас знания, рассмотрев, например, следующие задачи, связанные с перебором возможных вариантов и их подсчетом.

Задача 1.

Какие двузначные коды можно составить из букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, если на первом месте может стоять гласная, а на втором согласная? Достаточно ли их будет для кодирования экзаменационных листов 20 учащихся?

Решение:

Выпишем все комбинации, которые можно составить из этих букв указанным способом. Чтобы ничего не пропустить, упорядочим перебор с помощью таблицы.

	Б	В	Г	Д	Ж	З
А	АБ	АВ	АГ	АД	АЖ	АЗ
Е	ЕБ	ЕВ	ЕГ	ЕД	ЕЖ	ЕЗ
И	ИБ	ИВ	ИГ	ИД	ИЖ	ИЗ

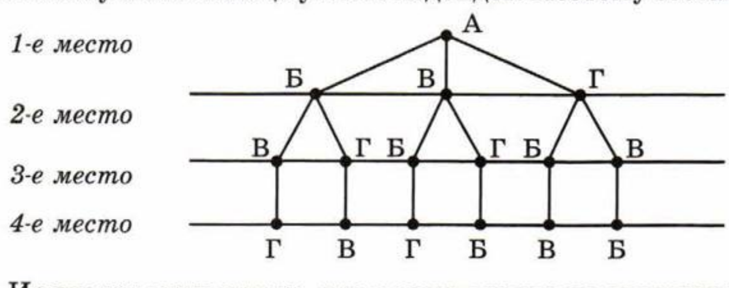
Из таблицы видно, что таких кодов 18, а, значит, для кодирования 20 работ их будет недостаточно. Чтобы увеличить число кодов можно, например, ввести еще одну согласную букву, тогда количество кодов увеличится на 3 и составит 21.

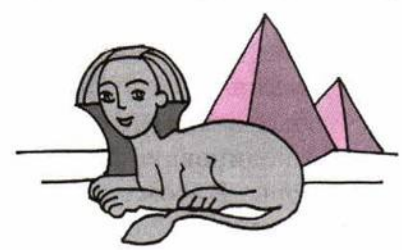
Задача 2.

Какие различные пароли, состоящие из четырех различных букв, можно составить, если в пароле могут быть использованы только буквы А, Б, В, Г? Сколько таких паролей существует?

Решение:

Рассмотрим сначала случай, когда на первом месте нашего пароля стоит буква А. В данной задаче пароль четырехзначный, и для того чтобы выписать все возможные варианты с этой буквой таблица уже не подойдет. Поэтому составим для этого следующую схему:

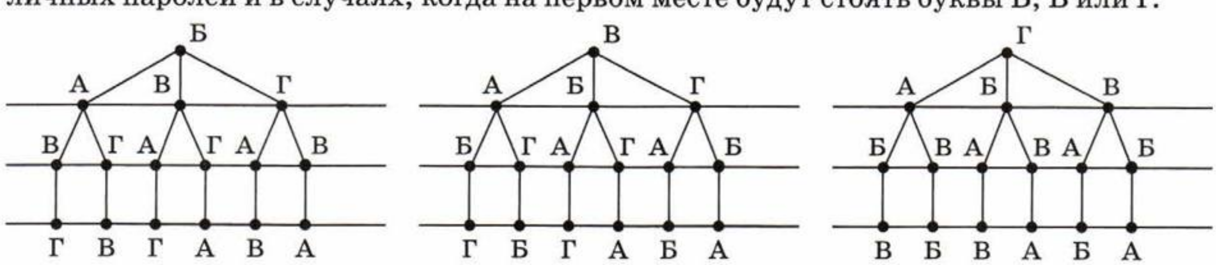




Из схемы ясно видно, что в этом случае на втором месте могут стоять только буквы Б, В и Г. Если на втором месте стоит буква Б, то на третьем месте могут стоять только буквы В и Г, а на четвертом, соответственно, буквы Г и В. Аналогично, по два варианта получается, если на втором месте стоят буква В и буква Г. Таким образом, общее число возможных вариантов в случае, когда на первом месте стоит буква А, равно шести:

АБВГ	АВБГ	АГБВ
АБГВ	АВГБ	АГВБ

Поскольку согласно условию задачи никаких ограничений на способ расположения букв в пароле не наложено, то, аналогичным образом, мы получим по шесть различных паролей и в случаях, когда на первом месте будут стоять буквы Б, В или Г.



Итак, общее число возможных паролей равно $6 \times 4 = 24$. Все варианты паролей можно выписать из полученных нами схем, двигаясь по каждой из «ветвей» схемы сверху вниз.

Ответ: всего можно составить 24 различных пароля.

Если возможные варианты нужно просто подсчитать, то можно попробовать обойтись без непосредственного выписывания всех этих вариантов.

Задача 3.

Сколько двузначных кодов можно составить из всех цифр и букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, если на первом месте может стоять цифра, а на втором буква? Достаточно ли их будет для кодирования экзаменационных листов 160 учащихся?

Решение:

Для понимания общего числа кодов в данном случае нам достаточно заполнить лишь первую строку таблицы, выписывая все возможные комбинации из указанных букв и цифры 0.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З
0	0А	0Б	0В	0Г	0Д	0Е	0Ж	0З
...								

Мы видим, что кодов с цифрой 0 будет восемь – столько же, сколько различных букв используется в коде. Ясно, что в остальных строках, где на первом месте будет стоять любая из девяти оставшихся цифр, мы также получим по восемь различных кодов: 1А, 1Б, 1В, 1Г, 1Д, 1Е, 1Ж, 1З; 2А, 2Б, 2В, 2Г, 2Д, 2Е, 2Ж, 2З и т. п.

Значит, общее число кодов будет равно произведению $10 \cdot 8 = 80$. Их не хватит для кодирования 160 листов.

Чтобы увеличить количество кодов, не добавляя новых символов, можно парами 1А и А1 кодировать различные работы, то есть учитывать порядок расположения буквы и цифры. В этом случае число составленных кодов увеличится вдвое и станет достаточным для кодирования 160 экзаменационных листов.

Итак, для подсчета числа комбинаций из различных объектов можно использовать *метод систематического перебора*, который состоит в следующем.

Метод систематического перебора

(подсчет числа комбинаций из различных символов)

1. Закрепить на первом месте комбинации один из символов, принадлежащих множеству заданных в задаче символов.
2. Для выделенного случая выписать возможные варианты, используя таблицу, схему или др. Подсчитать полученное число вариантов.
3. Если по условию задачи каждый из символов может занимать любую позицию, то общее количество возможных вариантов равно произведению числа вариантов, полученного для одного «закрепленного» символа на количество заданных символов.
4. Если на символы наложены какие-либо ограничения, то вычислить количество возможных вариантов отдельно для всех символов с различными свойствами, а затем сложить полученные числа.

Рассмотрим пример применения этого метода для решения следующей задачи.

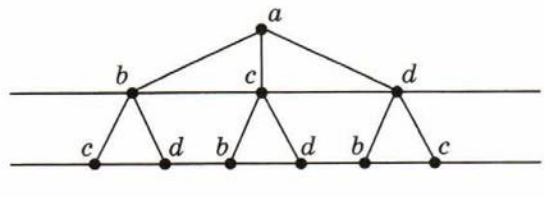
Пример 1.

Сколькими способами можно подарить по открытке трем своим подругам, если куплены четыре различные открытки?

Решение:

Обозначим открытки буквами a, b, c, d. Пусть запись (c, a, d) означает, что первой подруге мы подарим открытку c, а второй – a, а третьей – d. Таким образом, задача сводится к подсчету комбинаций из трех символов множества $\{a, b, c, d\}$.

Закрепив на первом месте комбинации букву a, систематически переберем возможные варианты с помощью схемы:



Получим следующие варианты (a, b, c), (a, b, d), (a, c, b), (a, c, d), (a, d, b), (a, d, c) – всего шесть.

По условию задачи каждый из символов может занимать любую позицию, поэтому общее количество возможных вариантов равно произведению полученного числа 6 на количество букв рассматриваемого нами множества $\{a, b, c, d\}$, то есть

$$6 \cdot 4 = 24.$$

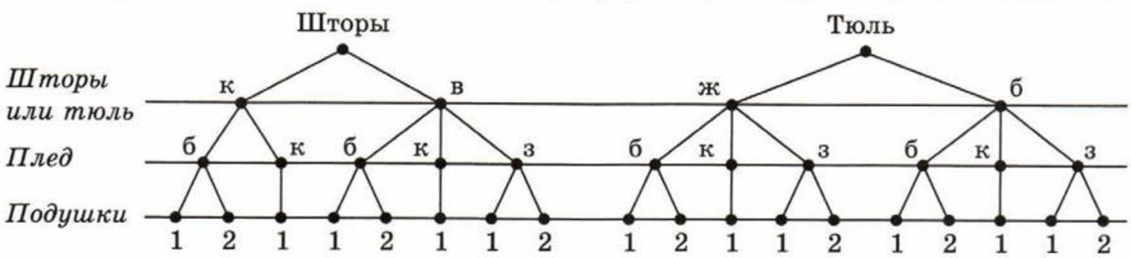
Рассмотрим теперь, как с помощью метода систематического перебора можно решить задачу, в которой на заданные символы наложены некоторые ограничения.

Пример 2.

Для оформления спальни текстилем дизайнер мог выбрать плед бежевого, кремового или золотистого тона, а также круглые или квадратные подушки. Для окон дизайнер мог использовать либо шторы (кораллового или вишневого цвета), либо тюль (желтого или белого цвета). Сколько различных вариантов оформления комнаты сможет составить дизайнер, если коралловые шторы не сочетаются с золотистым пледом, а с кремовым пледом «смотрятся» только круглые подушки?

Решение:

Составим схему, указывая названия деталей интерьера, их цвета обозначим первыми буквами, круглые и квадратные подушки соответственно цифрами 1 и 2. При этом учтем те ограничения на составление интерьера, которые заданы в условии задачи.



Количество вариантов равно количеству точек в последней строке. Значит, получилось 8 различных вариантов с шторами и 10 с тюлем, а всего – 18 интерьеров.

Ответ: дизайнер может составить 18 различных вариантов интерьера.

К **287** а) Флаг составлен из двух одинаковых горизонтальных полос разных цветов: желтого и голубого. Сколько различных вариантов удовлетворяют этому условию?

б) Флаг составлен из трех одинаковых горизонтальных полос разных цветов: красного, белого и синего. Сколько различных вариантов удовлетворяют этому условию?

в) Флаг составлен из четырех одинаковых горизонтальных полос разных цветов: красного, желтого, синего и зеленого. Сколько различных вариантов удовлетворяют этому условию?

В каком случае вариантов было больше? В какой из задач потребовалось записывать, как вы перебираете возможные варианты?

Знаете ли вы, какие из рассмотренных вами вариантов действительно являются государственными флагами?

288 Посчитайте, сколько слов русского языка состоят из одной буквы? Как организовать выполнение этого задания, чтобы не потерять ни одного однобуквенного слова?

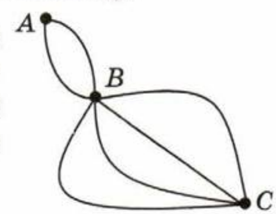
289 Прочитайте задачу: «Какие двузначные коды можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если полученный код должен образовать четное число (цифры кода не повторяются)? Достаточно ли их будет для кодирования 30 проектов, представленных для участия в конкурсе?»

Ответьте на вопросы:

а) Как нужно выписывать эти коды, чтобы не потерять ни одного кода и не допустить дублей?

б) Какая таблица может помочь в организации систематического перебора? Выполните перебор всех возможных вариантов, используя данную таблицу.

290 Из пункта A в пункт B существует две дороги, а из пункта B в пункт C существует четыре дороги. Изобразите разными цветами на схеме все возможные маршруты, с помощью которых можно попасть из пункта A в пункт C через пункт B. Сколько вариантов вы нашли?



291 Чем отличаются данные задачи? Решите их.

1) «Какие двузначные коды можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если на первом месте кода может стоять цифра 1 или 2 (цифры кода не повторяются)?»

2) «Какие трехзначные коды можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если на первом месте кода стоит цифра 1 (цифры кода не повторяются)?»

3) «Сколько трехзначных кодов можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры кода не повторяются?»

а) Для организации какого перебора подойдет таблица?

б) Может ли таблица помочь в организации перебора кодов второй и третьей задач? Как графически изобразить варианты кодов для второй задачи?

в) Как количество вариантов для выделенного во второй задаче случая может помочь при подсчете общего числа вариантов третьей задачи?

292 Перечислите все возможные блюда, которые можно составить из рыбы, мяса, курицы и следующих гарниров: картофель жареный, картофельное пюре, гречка, рис и макароны. Организуйте перебор с помощью таблицы, закрасьте ячейки с самыми вкусными на ваш взгляд комбинациями. Сколько всего вариантов получилось?

293 Перечислите все возможные варианты обедов из трех блюд, если предлагается следующее меню. На первое: щи и борщ; на второе: плов, жаркое и овощное рагу; на третье: компот и сок. Сколько всего вариантов получилось?

294 Проанализируйте решение предыдущих задач. Обобщите, какими способами можно организовать систематический перебор вариантов комбинирования различных элементов. Можно ли упростить процесс подсчета числа вариантов?

295 а) В некоторой стране есть четыре города: A, B, C и D. Есть 5 дорог из города A в город B, 4 дороги из города B в город C и 6 дорог из города С в D. Дорог из A в D, из A в C и из B в D нет. Сколькими способами можно добраться из города A в город D?

б) В некоторой стране есть четыре города: A, B, C и D. Есть 3 дороги из города A в город B, 4 дороги из города B в город C и 5 дорог из города С в D. Дорог из A в D нет. Сколькими способами можно добраться из города A в город D, если две дороги из города C в город D на ремонте?

296 В гардеробе у Кати есть короткая и длинная юбки, черные и серые брюки, а также – белая, голубая и зеленая блузки. Еще у Кати есть два платка – шелковый и шерстяной. Сколько различных нарядов, состоящих из юбки, кофты и платка, либо из брюк, кофты и платка сможет составить Катя из этих вещей, если:

а) все вещи хорошо смотрятся вместе?

б) голубая блузка не подходит ни под одну из юбок, а с брюками Маша шерстяной платок не носит?

297 В алфавите племени Ни-Бум-Бум три буквы. Словом является любая последовательность из трех букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Ни-Бум-Бум?

298 Кубик бросают дважды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

299 а) Администратор детского спортивного центра составлял расписание секций на следующий месяц, распределяя занятия по баскетболу, футболу, волейболу, гимнастике и лапте по рабочим дням недели (выходные были посвящены соревнованиям и спортивным праздникам). Укажите сколькими способами можно составить расписание, удовлетворив следующие просьбы тренеров. Тренер по футболу попросил, чтобы его занятия были во вторник или в среду; тренер по баскетболу – чтобы его занятия были в среду или в четверг; тренер по волейболу мог работать только во вторник или пятницу. Тренеры по гимнастике и лапте могли работать в любые дни недели.

б) Сколькими способами можно посадить в одном ряду шесть девочек, если четыре из них дружат, и все подружки хотят сидеть рядом?

в) Сколькими способами могут разместиться пять человек в пятиместном автомобиле, если только один из них не умеет управлять автомобилем?

300 а) Учащиеся седьмого класса изучают 8 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, так чтобы в этот день было 5 различных уроков?

б) Сколькими способами можно сшить штору, состоящую из четырех одинаковых вертикальных полос различных цветов, если имеются ткани 6 цветов?

в) Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6, 8, если цифры в числе могут повторяться?

П **301** Докажите неравенство $\frac{1}{4a}+a \geqslant 1$ при $a>0$.

302 Найдите наименьшее значение выражения $x+\frac{36}{x}$ при $x>0$.

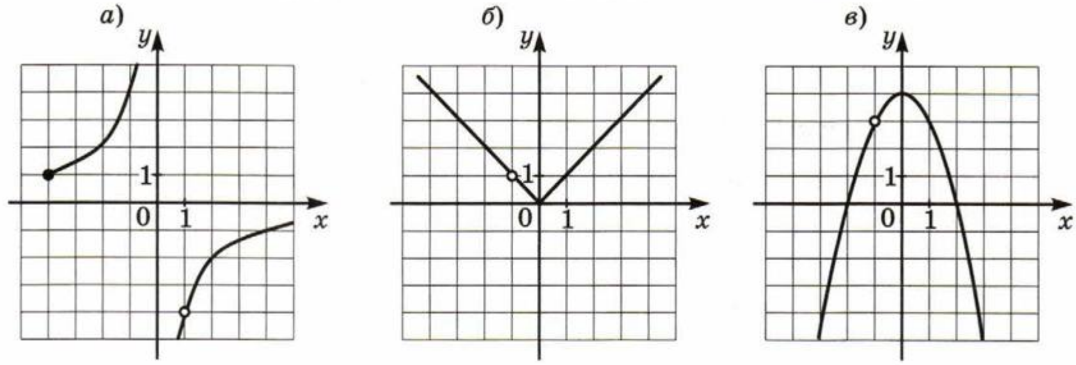
303 Найдите наименьшее значение выражения $\frac{(x+10)(x+20)}{x}$ при $x>0$.

304 Решите графически уравнение:

а) $-4x-4=x^2$; б) $x^3=x$; в) $\frac{2}{x}=-x$.

Проверьте свое решение, решив уравнение аналитически.

305 Напишите область определения функций, представленных на графиках:



306 Постройте графики функции:

а) $y=\begin{cases}(x-1)^2+3, \text{ если } x \geqslant 2;\\ x^2, \text{ если } 0<x<2;\\ -x, \text{ если } x \leqslant 0\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-x^2+6, \text{ если } x \leqslant 2;\\ |x|, \text{ если } x>2\end{cases}$ в)* $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } |x| \geqslant 1;\\ x, \text{ если } |x|<1\end{cases}$

«Прочитайте» каждый график по известному плану.

Д **307** а) В магазине «Турист» продается 8 видов палаток и 5 различных складных столов. Сколькими способами можно купить в этом магазине палатку и стол?

б) У Коли есть красный, зеленый, желтый и синий кубики. Сколькими способами он может построить из них башню высотой в 4 кубика?

308 а) Между городом B и A имеется 7 дорог, а между городом A и C – 6 дорог. Между городами B и C дорог нет. Сколькими способами можно добраться из города B в город C?

б) В меню школьной столовой 3 вида салатов, 2 вида первых блюд и 2 вида вторых блюд. Сколькими способами можно купить в школьной столовой обед из салата, первого и второго блюда?

в) Сколько различных шестизначных паролей из букв X и Z и цифр 1, 3, 5, 7 можно составить, если цифры и буквы в пароле не должны повторяться?

309 Под тремя наперстками спрятаны два одинаковых шарика (возможно, что оба под одним наперстком). Сколько разных вариантов расположения шариков под наперстками?

310 а) В седьмом классе одной из школ в расписании занятий на среду должны быть следующие предметы: геометрия, русский язык, информатика, физкультура, иностранный язык. Укажите, сколькими способами можно составить расписание, удовлетворив следующие просьбы учителей. Учителю физкультуры нужно, чтобы его урок был третьим или четвертым; учителю иностранного языка – чтобы его урок был вторым или третьим; учителю информатики – чтобы его урок был вторым или четвертым. Остальные учителя не высказывали никаких просьб.

б) Сколькими способами можно сложить в стопку шесть журналов и две газеты, так чтобы все журналы лежали рядом друг с другом?

в) Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр 2, 4, 7, 8, если цифры в искомом числе не повторяются?

311 Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в числе могут повторяться?

312 Найдите наименьшее значение выражения $x+\frac{100}{x}$ при $x > 0$.

313 Решите графически уравнение:

а) $x^2 = -6x + 7$; б) $(x + 1)^2 = -3x - 5$; в) $-\frac{1}{x} = x + 2,5$.

Как можно проверить свое решение?

314 Постройте график кусочно-заданной функции и «прочитайте» его по известному плану

$$y=\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 4;\\ \frac{1}{2}x, \text{ если } 0 \leqslant x < 4;\\ -(x+2)^2+4, \text{ если } x < 0\end{cases}$$

C **315*** Баскетбольный матч российской суперлиги между ЦСКА и «Динамо» (Москва) окончился победой ЦСКА со счетом 77: 53. В этом матче был момент, когда ЦСКА уже забросил столько мячей, сколько «Динамо» (Москва) забросил после этого момента. Сколько мячей к этому моменту было в сумме заброшено обеими командами?

316* Сумму двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2517?

2. Задача подсчета различных вариантов. Правило произведения

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым.

Лазар Карно (1753–1823), французский военный деятель, инженер, ученый

В предыдущем пункте мы использовали метод систематического перебора всех возможных комбинаций элементов некоторого множества. Но чаще всего в задачах требуется найти не сами комбинации, а их количество, то есть ответить на вопросы типа: «Сколько вариантов существует?», «Сколькими способами можно это сделать?». Так, если мы захотим выяснить время, необходимое для проведения в школьном зале первенства по волейболу в один круг (каждая команда играет с каждой другой один раз), нам потребуется сосчитать количество встреч между парами команд. И если мы знаем, сколько времени в среднем длится одна встреча, то умножив это время на количество встреч, мы получим оценку времени проведения первенства.

В настоящее время для ответа на этот вопрос мы должны вначале осуществить систематический перебор всех встреч, а затем сосчитать их количество. Пусть, например, в школе имеется 6 команд. Выпишем все возможные варианты встреч в таблице, учитывая, что, во-первых, команда не будет играть сама с собой, поэтому вместо игр

1 – 1, 2 – 2 и т. д. поставим прочерки. И во-вторых, чтобы не дублировать запись одной и той же игры, договоримся на первом месте указывать меньший номер команды. Например, игру 1-й и 2-й команд запишем 1 – 2 (а не 2 – 1).

№ команды	1	2	3	4	5	6
1	–					
2	1 – 2	–				
3	1 – 3	2 – 3	–			
4	1 – 4	2 – 4	3 – 4	–		
5	1 – 5	2 – 5	3 – 5	4 – 5	–	
6	1 – 6	2 – 6	3 – 6	4 – 6	5 – 6	–

Непосредственный подсчет записанных в таблице пар даст нам общее количество игр, которые сыграют 6 команд: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Естественно, что чем больше команд, тем труднее непосредственно выписать и пересчитать все пары. Поэтому проще найти какие-либо общие закономерности, которые позволят получить результат быстрее. Кто-то заметит, что количество пар с каждой последующей цифрой уменьшается на один. Тогда общее количество игр, которые сыграют, например, 10 команд, равно: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + + 3 + 2 + 1 = 45$. Другой заметит, что количество заполненных ячеек в таблице в два раза меньше числа ячеек, не стоящих на диагонали, поэтому оно равно половине разности квадрата числа и самого числа, значит: $(10^2 - 10) : 2 = 45$. А кто-то, возможно, проведет другие рассуждения, которые также приведут к ответу 45.

Однако чаще всего подобные задачи содержат огромное число вариантов и их непосредственный перебор практически невозможен. Упростить же перебор не всегда удается, так как всякий раз для этого требуется некоторая «догадка». Поэтому гораздо удобнее один раз и навсегда составить общие правила для задач того или иного вида, а затем лишь применять готовые формулы. В связи с этим несколько столетий назад в математическом знании выделился специальный раздел – *комбинаторика*, получивший впоследствии мощное развитие и широкое применение.

Определение. **Комбинаторикой** называется раздел математики, изучающий способы подсчета количества комбинаций, образованных из элементов конечных множеств по определенным правилам.

В качестве элементов множества могут выступать не только числа, но и любые объекты – буквы, предметы, люди, команды, как в рассмотренной нами задаче, и т. д. Поэтому правила и формулы, установленные в комбинаторике, позволяют решать самые разные задачи, совершенно друг на друга не похожие на первый взгляд.

Познакомимся с этими формулами и мы. Для начала рассмотрим несколько комбинаторных задач.

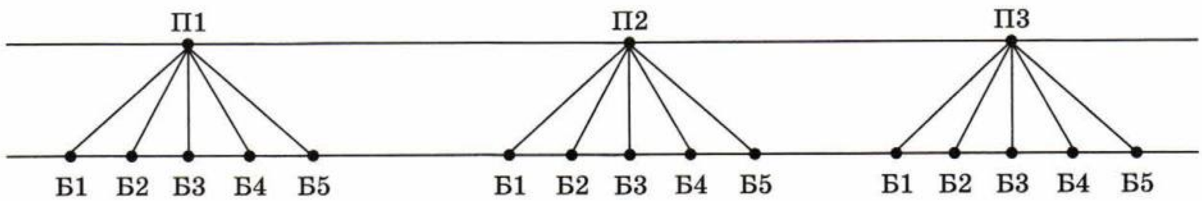
Задача 1.

У Светы 3 нарядных платья и 5 бус. Чтобы найти самые красивые и неожиданные их комбинации, Света решила примерить платья и бусы всеми возможными способами. Сколько вариантов ей пришлось перебрать?

Решение:

Ясно, что Света должна примерить все пять бус сначала с первым платьем, затем – со вторым платьем, и, наконец, – с третьим. При этом каждый раз будет получаться по пять различных комбинаций.

Обозначив платья П1, П2 и П3, а бусы Б1, Б2, Б3, Б4 и Б5, можно изобразить все возможные варианты пар на следующей схеме:



Отсюда, каждому из трех платьев соответствует пять вариантов бус, всего $3 \cdot 5 = 15$ вариантов (общее количество вариантов равно количеству «веток» в схеме).

Задача 2.

Найти количество двузначных чисел, у которых первая цифра – нечетная, а вторая – меньше 6.

Решение:

Начнем выписывать все указанные в задаче числа в порядке возрастания:
10, 11, 12, 13, 14, 15,
30, 31, 32, 33, 34, 35,
50, 51, ..., 55,
70, 71, ..., 75,
90, 91, ..., 95.
Легко заметить закономерность: с каждой из пяти нечетных цифр начинаются ровно шесть чисел. Всего получается пять раз по шесть чисел, то есть 30 чисел.

Иначе этот результат можно объяснить так: на первое место мы можем поставить любую из пяти нечетных цифр. Зафиксируем ее. Вне зависимости от выбора этой цифры на втором месте может стоять любая из шести цифр от 0 до 5. То есть каждому из пяти вариантов с фиксированной первой цифрой соответствуют шесть вариантов с выбором второй цифры, всего $5 \cdot 6 = 30$ вариантов.

Обобщая способ решения этих задач, мы можем сделать важный вывод: **если первый элемент какой-то пары может быть выбран A способами, и для каждого из этих способов второй элемент может быть выбран B способами, то эту пару можно выбрать $A \cdot B$ способами.**

Применим полученный вывод к решению следующей задачи.

Задача 3.

Петя красит лавочки и стол на даче. Первую лавку он хочет покрасить одним из четырех цветов: синим, голубым, белым или зеленым, вторую – одним из трех цветов – красным, желтым или коричневым, а стол – любым из перечисленных семи цветов. Сколько разных вариантов покраски стола и лавок есть у Пети?

Решение:

Первая лавка может быть покрашена *любым* из 4 цветов. Для каждого выбранного варианта покраски первой лавки имеется 3 цвета покраски второй лавки. Всего получается $4 \cdot 3 = 12$ вариантов покраски лавок. Теперь для каждого из 12 выбранных вариантов покраски лавок имеется 7 вариантов покраски стола. Всего получается $12 \cdot 7 = 84$ варианта.

Иначе этот ответ может быть получен как произведение $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Обобщив способ, использованный нами для подсчета вариантов в этих задачах, получаем следующее правило.

Правило произведения

Если элемент a_1 может быть выбран A_1 способами, элемент a_2 – A_2 способами, ..., элемент a_n – A_n способами и выбор разных элементов происходит независимо, то набор $(a_1; a_2; ...; a_n)$ элементов можно выбрать $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$ способами.

Применим это правило к решению задач.

Пример 1

Сколько паролей, состоящих из четырех букв, можно составить, если в пароле могут быть использованы буквы С, Т, О, П?

Решение:

Согласно условию задачи, подсчитывая количество возможных паролей, мы должны учитывать и те пароли, буквы в которых будут повторяться.

В качестве первой буквы пароля можно выбрать любую из четырех указанных в задаче букв. Значит, первую букву в пароле можно выбрать 4 способами.

Аналогично, каждую из второй, третьей и четвертой буквы пароля также можно выбрать четырьмя способами. Значит, всего можно составить $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ различных паролей.

Пример 2

Сколько различных паролей, состоящих из четырех различных букв, можно составить, если в пароле могут быть использованы только буквы С, Т, О, П?

Решение:

В отличие от предыдущего примера, буквы в пароле не должны повторяться. Первой в пароле может стоять любая из четырех букв, второй – любая из трех оставшихся, третьей – любая из двух оставшихся, четвертой – одна.

Значит, всего будет $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ различных пароля.

В завершение покажем, каким образом правило произведения может быть использовано при решении задачи о первенстве по волейболу при игре 10 команд.

В каждой игре участвует две команды, поэтому нам надо сосчитать количество пар, которые можно составить из 10 команд. Если бы выбор команд в пару осуществлялся вне зависимости от порядка их перечисления, то первой в паре могла оказаться любая из 10 команд, а второй – любая из 9 оставшихся. По правилу произведения общее количество пар будет равно $10 \cdot 9 = 90$. Однако при этом каждая игра подсчитана дважды (сначала при подсчете пар одного участника игры, а затем – при подсчете пар его соперника). Значит, на самом деле игр будет сыграно вдвое меньше $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Теперь мы можем решить и общую задачу подсчета количества игр при участии n команд. Проводя аналогичные рассуждения, мы получим $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

В 9-м классе мы узнаем формулу, которая позволит решить эту и подобные ей комбинаторные задачи в одну строку без таких подробных рассуждений.

К **317** 1) Чем похожи эти задачи:

а) «К Маше в гости пришел Ваня, и она решила его чем-нибудь угостить. У себя в буфете она нашла семь различных печений и пять разных пирожных. Сколькими различными способами Маша может угостить Ваню, если она хочет дать ему лишь одно пирожное и одно печенье?»

б) «К Ване в гости пришла Маша, и он решил ее чем-нибудь угостить. Ваня, отыскав в холодильнике три яблока и четыре груши, решил дать Маше пару различных фруктов: одно яблоко и одну грушу. Сколько различных вариантов угощения может он составить (все фрукты отличаются друг от друга и цветом, и размером)?»

2) Попробуйте решить эти задачи без непосредственного перебора всех возможных вариантов угощения. Сформулируйте правило нахождения числа пар, каждый элемент которых имеет несколько вариантов выбора. Сравните его с выводом на стр. 88.

318 В классе учатся 14 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами можно составить пару девочка-мальчик для открытия школьного бала?

319 На дне рождении собрались 10 юношей и 10 девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

320 В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

321 1) Прочитайте задачу: «К Маше в гости в очередной раз пришел Ваня, и она решила его чем-нибудь угостить. Маша нашла в буфете семь различных печений, пять разных пирожных и десять разных конфет. Сколько есть у нее способов составить угощение для Вани, если она хочет дать ему одну конфету, одно печенье и одно пирожное?

2) Чем отличается эта задача от предыдущих задач про угощение? Попробуйте решить ее. Как выводы, сделанные при решении предыдущих задач, смогут помочь для подсчета числа способов в этой задаче. Сформулируйте правило, которым вы пользовались. Сравните его с правилом на стр. 88.

322 Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть только цифры 1, 2, 3, 4, 5 и они а) встречаются ровно по одному разу; б) могут повторяться?

323 Найдите количество трехзначных чисел, у которых первая цифра – нечетная, вторая – четная, а третья – делится на 3.

324 Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких что точка $(14;22)$ содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты – натуральны и меньше, чем 31.

325 Как известно, все символы в компьютере закодированы «двоичным кодом», то есть представлены с помощью всего двух символов 1 и 0, которые легко представляются сигналами. В современных ЭВМ, в зависимости от типа операционной системы и конкретных прикладных программ, используются 8-разрядные и 16-разрядные коды. Так, в 8-разрядном коде символ «пробел» переводится на машинный язык последовательностью из восьми цифр: 00101000. Какое наибольшее число символов может быть закодировано 8-разрядным кодом? Какое наибольшее число символов может быть закодировано 16-разрядным кодом?

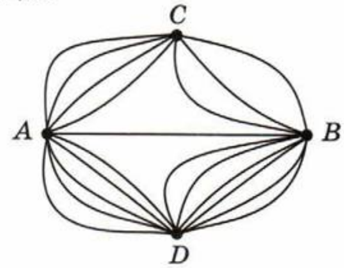
326 а) Монету бросают трижды и каждый раз записывают, что выпало: «орел» или «решка». Сколько разных последовательностей «орлов» и «решек» можно при этом получить?

б) Монетку бросают десять раз и каждый раз записывают, что выпало: «орел» или «решка». Сколько различных последовательностей из «орлов» и «решек» может при этом получиться?

327 а) Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

б) Каждую клетку квадратной таблицы 3×3 можно покрасить в синий или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

328 Из города A в город B ведет одна дорога, в город C – четыре, в D – пять, из города C в город B – три дороги, а из D в B – шесть. Сколько существует способов доехать из города A в город B, если считать, что по дорогам можно ехать лишь в одном направлении – слева направо?



329 1) Прочитайте задачу: «В очередной раз к Маше в гости пришел Ваня, и она решила его чем-нибудь угостить. Маша, отыскав в буфете семь печений, пять пирожных и десять конфет, решила дать Ване только две какие-нибудь сладости (печенье с пирожным, пирожное с конфетой или конфету с печеньем). Сколько различных вариантов угощения может она составить?»

2) Чем отличается эта задача от предыдущих задач про угощения? Из каких простых задач, способ решения которых уже известен, она состоит? Попробуйте решить задачу и сформулировать способ решения аналогичных задач.

3) Придумайте для своего соседа по парте аналогичную задачу, обменяйтесь придуманными задачами, проверьте условие на корректность и решите составленную соседом задачу.

330 Сколькими способами можно прочитать слово «КОМБИНАТОРИКА», двигаясь вправо или вниз?

К	О	М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А
О	М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А	
М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А		
Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А			
И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А				
Н	А	Т	О	Р	И	К	А					
А	Т	О	Р	И	К	А						
Т	О	Р	И	К	А							
О	Р	И	К	А								
Р	И	К	А									
И	К	А										
К	А											
А												

331 Сколькими способами можно поставить на шахматную доску:

а) черную и белую ладью;

б) черного и белого слона;

в) черного и белого коня;

так, чтобы они не били друг друга?

332 а) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетные?

б) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых четные?

в) Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна цифра 5?

г) Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5?

д) Сколько существует шестизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

333 В алфавите племени Тумба-Юмба шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Тумба-Юмба?

П **334** Боря точно помнит, что в формуле угольной кислоты подряд идут буквы H, C, O и что есть два нижних индекса 2 и 3. Но вот у каких букв они стоят и в каком порядке, он не помнит. У него есть возможность использовать программу, которая по введенной формуле отражает название кислоты. Нарисуйте схему, с помощью которой он переберет все возможные варианты формулы. Сколько вариантов ему придется ввести в программу, чтобы определить нужную формулу в «худшем» случае? Можно ли ответить на этот вопрос без схемы?

335 Какие из следующих функций являются четными, а какие нечетными?

а) $y = x^4 - 1$; б) $y = \dfrac{1}{x+2}$; в) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; г) $y = x^2 - |x| + 3$.

336 а) Для функции $f(x) = -x^2$ найдите $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f(a)$; $f(-a + 3)$.

б) Для функции $f(x) = x^3$ найдите $f(3)$; $f(a)$; $0{,}1f(-a^2)$.

в) Для функции $f(x) = -\dfrac{1}{x^3}$ найдите $f(0)$; $f(0{,}2a)$; $-\dfrac{1}{f(a^3)}$.

г) Для функции $f(x) = -\sqrt{x}$ найдите $f(-9)$; $f(0)$; $f(81)$; $f((a-1)^2)$.

337 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \dfrac{12}{x} \\ y = 2x - 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{1}{2} \\ y = -x + 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = -\sqrt{x} \\ y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

338 Упростите выражения:

а) $\left(0{,}2\sqrt{3}\right)^2$; д) $2\sqrt{1{,}6} + 0{,}5\sqrt{40} - 8\sqrt{0{,}1}$; и) $\sqrt{\left(9 + 2\sqrt{7}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{7}\right)^2}$;

б) $\sqrt{2{,}25} - \sqrt{1{,}96}$; е) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$; к) $\sqrt{0{,}1^3 \cdot 0{,}001}$;

в) $\left(\sqrt{6} + 2\right)^2 - 6 - 2\sqrt{6}$; ж) $\sqrt{2}(\sqrt{72} - \sqrt{50})$; л) $\sqrt{54} - \sqrt{96}$;

г) $\dfrac{3}{\sqrt{7} - 2}$; з) $\sqrt{1\dfrac{37}{324} : \dfrac{1}{18}}$; м) $\sqrt{4{,}9 \cdot 8{,}1}$.

Д **339** В классе 24 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

340 Сколько различных четырехзначных паролей можно составить из букв К, Р, У, Г, если а) буквы в пароле не повторяются; б) буквы в пароле могут повто-ряться?

341 Монету подбрасывают шесть раз подряд и каждый раз записывают, что выпало: «орел» или «решка». Сколько различных последовательностей «орлов» и «решек» можно получить в результате такого подбрасывания?

342 Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу?

343 а) Игральный кубик с гранями красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого и синего цветов бросают 4 раза и записывают цвет, выпавший на верхней грани. Сколько различных последовательностей цветов можно было получить, если на последнем броске всегда выпадает красный цвет?

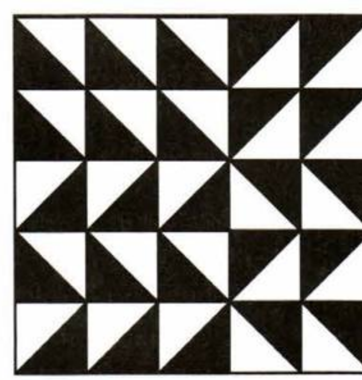
а) Номер паспорта в некотором государстве состоит из двух, трех или четырех цифр. Серия паспорта состоит из трех букв. Сколько существует в этом государстве паспортов, номер которых начинается на 98, если в номере могут быть использоваться все десять арабских цифр, а в серии используются все буквы русского алфавита, кроме буквы Ы?

344 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{6}{x} \\ y=-2x+8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=x^2-5x+6 \\ x+y=2 \end{cases}$.

345 Расположите числа в порядке возрастания: $6\sqrt{2}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{1\dfrac{7}{9}}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{1\dfrac{17}{64}}$.

C **346*** Квадрат разбит на единичные клетки. Его покрывают 25 черных и 25 белых прямоугольных равнобедренных треугольников, так что каждую клетку закрывают два треугольника. «Шахматным» будем называть такие покрытия, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует различных «шахматных» покрытий? (Одно из возможных «шахматных» покрытий изображено на рисунке).



347* Три путника решили устроить привал и вместе пообедать. У первого было 5 бутербродов, у второго – 4 бутерброда. У третьего ничего не было, поэтому он заплатил первым двум за свою порцию 36 р. Все путники ели поровну. Как следует распределить между первым и вторым путниками деньги, заплаченные третьим, чтобы взнос каждого из путников в совместную трапезу был одинаковым?

348* В конструкторе имеются три вида фигур: цилиндры, конусы, параллелепипеды. Все фигуры одного вида одинаковые. Шесть цилиндров, четыре конуса и три параллелепипеда весят 1200 г, а четыре цилиндра, шесть конусов и семь параллелепипедов весят 1700 г. Сколько весят цилиндр, конус и параллелепипед вместе?

3. Перестановки. Формула числа перестановок

Книга – книгой,
А мозгами двигай...

Владимир Маяковский (1893—1930),
поэт, драматург, публицист

В предыдущем пункте мы установили правило произведения для подсчета **количества возможных способов составления комбинаций из элементов** какого-либо множества. Это правило поможет нам вывести общую формулу для решения распространенного в комбинаторике типа задач.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1.

В финал соревнования вышли трое участников. Сколькими способами они могут занять призовые места?

Решение:

Обозначим участников финала числами 1, 2 и 3, а место, занятое участником, начиная с первого, соответственно цифрой сотен, десятков и единиц. Например, запись 132 означает, что первое место занял участник 1, второе – участник 3, а третье – 2.

Получим следующие *перестановки* элементов множества $\{1, 2, 3\}$, всего 6 способов:

$$123;\ 132;\ 213;\ 231;\ 312;\ 321.$$

Этот же ответ мы можем получить быстрее, используя правило произведения. Действительно, первое место может занять любой из трех финалистов – три способа выбора, тогда второе место – один из двух оставшихся финалистов, два способа выбора, а третье – один оставшийся финалист, один способ выбора. Значит, места между участниками соревнования могут быть распределены $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами.

Ответ: 6.

Задача 2.

Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

Для ответа на вопрос задачи нам надо узнать, сколькими способами можно *переставить* элементы множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Чтобы выписать все возможные семизначные числа и подсчитать их количество требуется не менее 5 часов. Поэтому естественно применить правило произведения, которое позволит нам получить ответ моментально.

Действительно, рассуждая как в задаче 1, получим, что первую цифру семизначного числа можно выбрать 7 различными способами, вторую, соответственно, – 6, третью – 5, четвертую – 4, пятую – 3, шестую – 2 и седьмую – одним. Значит, в соответствии с правилом произведения, семизначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 существует всего $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Ответ: 5040.

Как мы видим, в обеих задачах ставился вопрос о том, **сколькими способами можно расположить в разном порядке все элементы некоторого множества**.

Обобщив способ, использованный нами для подсчета вариантов в этих задачах, получаем следующее правило:

> n элементов множества можно переставить $\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ способами.

Выведем полученную формулу решения таких задач, используя понятия, принятые в комбинаторике. Вначале сформулируем задачу в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно упорядочить элементы данного множества?

Упорядоченный набор всех элементов заданного множества принято называть **перестановкой**, а число перестановок множества из n элементов обычно обозначают $\boldsymbol{P_n}$ (от начальной буквы французского слова «*permutation*» – перестановка).

Докажем, что количество перестановок $\boldsymbol{P_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Доказательство.

Первый элемент можно выбрать из элементов данного множества n различными способами; при фиксированном первом элементе второй можно выбрать $(n-1)$ различными способами и т. д. Если первые $(n-1)$ элементов уже фиксированы, то для последнего элемента остается всего одна возможность.

Следовательно, на основании правила произведения элементы данного множества можно упорядочить $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами, что и требовалось доказать. ■

Полученную формулу можно записать короче. Для этого запишем множители $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ в обратном порядке $1 \cdot 2 \cdot 3 ... (n-1) \cdot n$ и используем символ $n!$, которым обозначают подобные произведения.

Определение. Произведение n первых натуральных чисел называют **факториалом** числа n и обозначают $\boldsymbol{n!}$ Читают: «эн факториал».

Другими словами,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Таким образом, для подсчета количества перестановок n элементов некоторого конечного множества будем применять следующую формулу:

> **Формула количества перестановок из n элементов**
> $\boldsymbol{P_n = n!}$, **где $\boldsymbol{n = 1, 2, ...}$**

Заметим, что:

$1! = 1$	$3! = 6$	$5! = 120$	$7! = 5040$	$9! = 362\,880$
$2! = 2$	$4! = 24$	$6! = 720$	$8! = 40\,320$	$10! = 3\,628\,800$

Мы видим, что с ростом n число $n!$ очень быстро растет. Так, например, $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ (19-значное число), а $50!$ – это 65-значное число. Чтобы представить, насколько велико это число, укажем, что объем земного шара в кубических миллиметрах составляет приблизительно 10^{30}, а это «всего лишь» 31-значное число. Вообразим теперь, что перед нами 10^{30} наших земных шаров. Подсчитав, сколько кубических миллиметров поместится в это гигантское количество шаров, мы получим 61-значное число.

Рассмотрим примеры применения установленной формулы.

Пример 1.

Сколькими способами можно составить список учеников класса, в котором учится 28 человек и нет однофамильцев?

Решение:

Для ответа на вопрос этой задачи мы должны узнать, сколькими способами можно *переставить* 28 фамилий учеников.

Искомое число равно числу перестановок $P_{28} = 28!$. Заметим, что $28!$ – это очень большое число, приблизительно равное $3 \cdot 10^{29}$. Поэтому вычислять значение $28!$ мы не будем и оставим ответ в такой форме.

Ответ: $28!$.

Пример 2.

Сколько семизначных чисел, кратных 25, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, если цифры в числе не повторяются?

Решение:

Если натуральное число делится на 25, то две его последние цифры либо 00, либо 25, либо 50, либо 75. В нашем случае это могут быть только цифры 25.

Итак, последние две цифры уже зафиксированы. Первые пять цифр образуют пятизначное число, составленное из цифр 1, 3, 4, 6, 8, которые не повторяются. По формуле количества перестановок из n элементов таких чисел $P_5 = 5! = 120$. Следовательно, искомых семизначных чисел тоже 120.

Ответ: 120.

К **349** а) В магазине спортивных товаров продается 5 видов горных лыж и 8 различных видов палок. Сколькими способами можно купить в этом магазине горные лыжи и палки к ним?

б) У Оли есть синий, зеленый, оранжевый и фиолетовый шарфы. Сколькими способами она может сложить их в стопку?

350 1) Что общего во всех этих задачах:

а) Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 3 человека?

б) Сколькими способами можно выложить в ряд 6 разноцветных кубиков?

в) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в числе не повторяются)?

2) Решите эти задачи и обобщите использованный вами способ для решения всех подобных задач. Сколькими способами можно расположить в разном порядке все элементы некоторого множества? Сравните свой ответ с правилом на стр.92.

3) Как называются комбинации, которые следует пересчитать во всех этих задачах? Познакомьтесь с их названием на стр. 92 и выводом общего способа решения подобных комбинаторных задач.

351 Вычислите:

а) $3!$; в) $5!$; д) $4! + 3!$; ж) $4! \cdot 5!$;
б) $4!$; г) $6!$; е) $4! + 3$; з) $4 \cdot 5!$.

352 Девочке мама на завтрак дала йогурт, конфету, пряник, булочку. Сколько различных порядков «поедания» этих сладостей есть у девочки, если она хочет съесть их все?

353 Сколькими способами на полку можно поставить 10 разных книг?

354 Сколько различных шестизначных паролей из цифр 2 и 7 и букв A, B, C, D можно составить, если цифры и буквы в пароле не должны повторяться?

355 Сравните условия задач и решите их последовательно:

а) Сколькими различными способами можно расставить в ряд 7 девочек?
б) Сколькими различными способами 7 девочек могут водить хоровод?
в) Сколько различных ожерелий можно составить из 7 разных бусин?

П **356** Сравните числа:

а) 8 и $\sqrt{37}$; б) $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{7}$; в) $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{13}$; г) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

357 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{15}-2\sqrt{5})(\sqrt{15}+2\sqrt{5})$;

б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{13}\right)^2}$;

в) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{21-12\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$;

е) $\left(2-\sqrt{13}\right)^2+4\sqrt{17-4\sqrt{13}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{11+\sqrt{21}}}{\sqrt{11-\sqrt{21}}}+\dfrac{\sqrt{11-\sqrt{21}}}{\sqrt{11+\sqrt{21}}}$;

з) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$.

358 Решите неравенства:

а) $5x^2 + 4 \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} < \sqrt{72}$; в) $(6-x)(x+1)^2 \leqslant 0$.

359 В таблице указаны данные отчета одной из фирм, занимающейся установкой кондиционеров, о количестве кондиционеров, установленных в летние и весенние месяцы за последний год.

Март	126	Июнь	601
Апрель	204	Июль	855
Май	312	Август	704

1) Вычислите среднее количество кондиционеров, установленных за один летний месяц; за один весенний месяц. Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

2) Найдите медиану данных за летние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за лето показатели продаж? Найдите медиану данных за весенние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за весну показатели продаж? Найдите медиану данных за все эти месяцы.

3) Вычислите размах указанных в таблице значений. Дайте возможное объяснение тому, что этот показатель достаточно значителен. Будет ли так значителен размах продаж: а) за летние месяцы; б) за весенние месяцы? Проверьте свое предположение, вычислив эти показатели.

360 Решите уравнения:

а) $x^3 - 9x^2 + x - 9 = 0$; в) $5z^3 + 55z^2 + 10z + 110 = 0$;

б) $y^4 - 6y^3 + 8y^2 - 48y = 0$; г) $2t^4 + 18t^3 + 7t^2 + 63t = 0$.

Д **361** а) На витрину в ряд выставили три торта: «Наполеон», «Прага» и «Птичье молоко». Сколько вариантов их размещения могли быть получены?

б) Из цифр 4, 6, 8 составляют трехзначное число, сколько таких чисел можно получить, если цифры в числе не повторяются?

362 Прочитайте задачи:

а) В коробку кладут 5 разноцветных фломастеров: розовый, желтый, зеленый, красный и оранжевый. Сколькими способами их можно выложить в коробку?

б) Соня взяла в библиотеке журналы «Все о комнатных растениях» за январь, февраль, март, апрель и май. Сколькими способами можно сложить в стопку эти журналы?

в) В конкурсе участвуют 5 школьников. Сколькими способами могут быть распределены места между ними?

Сравните эти задачи, что вы замечаете? Придумайте аналогичную задачу и запишите ее решение.

363 Пятнадцать девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

364 Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{13}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{13}+3\sqrt{3}\right)$; в) $\sqrt{\left(5-\sqrt{7}\right)^2}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{7}+2\right)^2$;

б) $\sqrt{\left(5-\sqrt{17}\right)^2}$; г) $\left(1+\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

365 Решите уравнения:

а) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$; б) $2y^4 - 8y^3 + 3y^2 - 12y = 0$.

С **366*** Имеется 17 чисел равных 2,3 и 19 чисел равных 2,33. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой группе?

367* Два пловца стартовали одновременно от одного бортика бассейна и стали плавать по одной дорожке вперед и назад без остановки до того момента пока оба одновременно не оказались у того бортика, от которого стартовали. Первый проплывал от одного конца бассейна до другого за 3 минуты, а второй – за 5 минут. Сколько раз за время этого плавания первый пловец обогнал второго?

§2. Элементы статистики и теории вероятностей

1. Еще о статистических характеристиках. Дисперсия

Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир.

Иоганн Вольфганг Гете (1749–1832), немецкий поэт и философ

В 7-м классе мы познакомились с простейшими статистическими характеристиками, такими как среднее значение, мода, медиана и размах. Однако в статистике имеются и другие показатели, которые позволяют более точно описывать и анализировать собранную информацию.

Прежде чем познакомиться с ними, введем определение.

***Определение* 1.** Набор чисел *упорядочен по возрастанию*, если числа набора записаны так, что каждое последующее число не меньше предыдущего. Набор чисел *упорядочен по убыванию*, если числа набора записаны так, что каждое последующее число не больше предыдущего.

Для удобства анализа набора чисел его лучше упорядочить. Рассмотрим пример. В таблице выписаны результаты школьной олимпиады по математике в восьмых классах:

Участник	Аня	Оля	Вова	Соня	Катя	Маша	Толя	Вика	Рома
Баллы	54	63	57	59	68	64	73	59	61

Тогда упорядоченный по возрастанию набор баллов, набранных школьниками, выглядит следующим образом:

$$54, 57, 59, 59, 61, 63, 64, 68, 73.$$

С помощью такой записи гораздо проще определить уже знакомые нам статистические характеристики. Например, найти типичный балл, набранный восьмиклассниками, – *моду набора*, равную 59.

Упорядоченный ряд чисел позволяет также легко находить число, стоящее посередине ряда, – *медиану*. Она указывает, что средний результат показал Рома, потому что есть четверо учеников, которые написали работу лучше него, и четверо, которые справились с ней хуже.

Если бы мы искали медиану баллов, набранных девочками, то их упорядоченный ряд выглядел бы следующим образом: 54, 59, 59, 63, 64, 68. Как мы знаем, медиану в таком случае рассчитывают как среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине: $\frac{59+63}{2}=61$.

Нам известна еще одна статистическая характеристика – *размах набора*, позволяющая определить, как велик разброс данных в наборе. Чтобы найти его, нам нужно вычислить разность минимального и максимального значения: 73 – 54 = 19. Недостаток этого показателя заключается в том, что он зависит только от двух крайних значений в ряду чисел и не характеризует, как отличаются числа друг от друга внутри этого набора.

Рассмотрим следующий пример.

Два соседа каждый день ездят на работу в одно и то же место. У них есть два варианта поездки: на метро или на машине. В течение недели один из них ездил на метро, а второй – на машине. Время своих поездок (в минутах) они указали в следующей таблице:

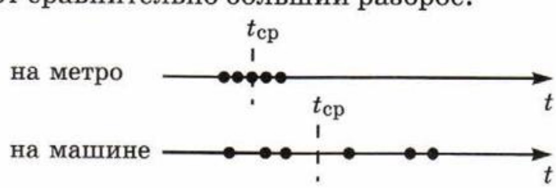
Транспорт \ День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
На метро	28	30	29	29	31	27
На машине	32	28	27	35	36	25

Оба варианта поездки занимают в среднем примерно одно и то же время:

$(28 + 30 + 29 + 29 + 31 + 27): 6 = 174: 6 = 29$ – на метро;
$(32 + 28 + 27 + 35 + 36 + 25): 6 = 183: 6 = 30{,}5$ – на машине.

Однако второй вариант подвержен гораздо большему влиянию внешних обстоятельств (машина может сломаться, на улицах есть светофоры, бывают пробки и т. д.), и поэтому значения в первой строке отличаются друг от друга меньше, чем значения в нижней строке.

Наглядно это удобно показать на рисунке. Отметим на числовой оси время, затраченное на эти ежедневные поездки. На рисунке, описывающем поездки на метро, точки будут лежать очень густо, мало *отклоняясь* от среднего значения, а на рисунке, который описывает поездку на машине, заметны очень большие *отклонения* от среднего – эти значения имеют сравнительно больший разброс.



Для того чтобы различать такого рода ситуации, мы использовали еще одну статистическую характеристику – *отклонения от среднего значения*. Чтобы понять, как вычисляется набор отклонений от среднего, вернемся к примеру с поездками на работу.

Среднее время поездки на метро составляло 29 минут, тогда отклонения времени поездок будут равны:

На метро	28	30	29	29	31	27
Отклонение от среднего	–1	1	–1	–1	2	–2

Среднее время поездки на машине составляло 30,5 минуты, тогда отклонения времени поездок будут равны:

На машине	32	28	27	35	36	25
Отклонение от среднего	1,5	– 2,5	– 3,5	4,5	5,5	– 5,5

Во втором случае модули найденных нами отклонений отличаются существеннее, чем в первом, – этот ряд является более «разбросанным» по своим значениям, что и продемонстрировано нами на числовых осях.

Однако при таком анализе нам приходится оперировать целыми наборами чисел, что не всегда удобно, ведь чисел может быть много. Поэтому в статистике выделяется еще один показатель, позволяющий находить среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения. Его называют *дисперсией* (от латинского слова dispersio – рассеиваю). Введем следующее определение.

Определение 2. Пусть M – среднее значение набора чисел. **Дисперсией набора чисел** называется отношение суммы квадратов разностей между элементами этого набора и числом M к количеству этих элементов.

Дисперсию набора принято обозначать D, тогда для числового набора $x_1, x_2,\dots x_n$ выполняется:

$$D=\frac{(x_1-M)^2+(x_2-M)^2+\dots(x_n-M)^2}{n}.$$

Вычислим дисперсию набора рассмотренных выше данных о времени, затраченном для поездки на работу.

Вычислим дисперсию набора значений времени поездки на метро, пользуясь определением:

$$D=\frac{(28-29)^2+(30-29)^2+(29-29)^2+(29-29)^2+(31-29)^2+(27-29)^2}{6}=\frac{10}{6}=1\frac{2}{3}.$$

Вычислим дисперсию набора значений времени поездки на машине, пользуясь найденными нами значениями отклонений:

$$D=\frac{1{,}5^2+(-2{,}5)^2+(-3{,}5)^2+4{,}5^2+5{,}5^2+(-5{,}5)^2}{6}=\frac{71{,}25}{6}=11{,}875.$$

Как мы видим, дисперсия характеризует отклонения результатов измерений от среднего их значения: **чем больше дисперсия, тем больше разброс значений в наборе чисел**, тем больше неопределенности и случайности в анализируемой ситуации.

К **368** В таблице представлены результаты забега семиклассников в соревнованиях по бегу на дистанцию 100м:

Фамилия	Результат	Фамилия	Результат	Фамилия	Результат
Авдеев	15,3	Зуев	15,5	Петин	19,9
Виданов	16,1	Карцев	18,3	Тараскин	15,3
Дятлов	17,0	Мжельский	21,7	Шептунов	20,2

Пользуясь данными этой таблицы, выполните задания:

1) Укажите среднее, наибольшее и наименьшее значения, размах и моду этого набора чисел.

2) Расположите результаты забега по возрастанию. Какие из найденных вами ранее характеристик быстрее находить с помощью такого способа представления данных?

3) Кто из ребят показал лучший результат, худший результат?

4) Кто из ребят показал средний результат? Какую характеристику вы использовали для ответа на этот вопрос?

369 В таблице показаны результаты измерения количества осадков за первую неделю октября (мм в сутки) в двух российских городах.

	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10	7.10
Омск	32	18	2	15	12	10	16
Уфа	28	1	30	0	29	15	2

1) Проанализируйте таблицу и ответьте на следующие вопросы:

а) Жители какого города должны были пользоваться зонтом регулярно?

б) Жители какого города за эту неделю то попадали под сильные или затяжные дожди, то наслаждались солнцем?

в) В каком из городов полученные измерения сильнее отличаются друг от друга?

2) Пользуясь данными этой таблицы, выполните следующие задания:

а) Найдите среднее количество осадков, выпавших за неделю в каждом из городов. Сравните полученные показатели. Характеризует ли этот показатель, что числа второго набора сильнее отличаются друг от друга, чем числа первого?

б) Определите размах измерений количества осадков за неделю в каждом из этих городов. Сравните полученные показатели. Характеризует ли этот показатель, что числа второго набора сильнее отличаются друг от друга, чем числа первого?

в) Могут ли известные вам характеристики показать, как сильно отличаются числа друг от друга внутри набора? Какие новые характеристики набора чисел вы могли бы предложить для ответа на этот вопрос? Сравните свой вариант со статистическими характеристиками, описанными в учебнике на стр. 97 – 98.

370 Найдите отклонения от среднего значения для следующих наборов чисел:

а) 20, 30, 40, 50, 60; б) 1, 2, 2, 3, 2, 2; в) 24; 11, 15, 16, 16, 28, 30.

Найдите сумму отклонений для каждого набора. Как вы можете объяснить полученные результаты?
Вычислите дисперсию одного из этих наборов.

371 В таблице представлены данные о количестве бутылок кваса (в тысячах), проданных в весенние и летние месяцы за два года (по данным компании-производителя). Вычислите дисперсию набора чисел (при необходимости воспользуйтесь калькулятором):

а) за 2012 год; за весенний период;

б) за 2013 год; за летний период.
Сравните полученные показатели.
Как вы можете пояснить результаты анализа?

	2012	**2013**
март	50	52
апрель	52	54
май	56	55
июнь	59,5	64
июль	60	62
август	55,5	61

372 Найдите медиану в следующих наборах чисел:

а) (14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30) и (16; 18; 20; 22; 24; 26; 28);

б) (13; 15; 17; 19; 21; 23) и (15; 17; 19; 21).

Что интересного вы замечаете? Чем отличается второй набор от первого? Можно ли обобщить результаты этих наблюдений на все наборы такого вида?

373 В некотором городе живет 100 000 трудоспособных жителей. Из них

- 5 000 безработные (их месячная зарплата равна 0 рублей);
- 30 000 жителей получают зарплату 7 000 рублей;
- 20 000 жителей – 10 000 рублей;
- 20 000 жителей – 15 000 рублей;
- 10 000 жителей – 20 000 рублей;
- 5 000 жителей – 30 000 рублей;
- 5 000 жителей – 40 000 рублей;
- 2 000 жителей – 50 000 рублей;
- 2 000 жителей – 100 000 рублей;
- 1000 жителей – 500 000 рублей.

Вычислите среднее значение, медиану и моду зарплаты в этом городе. Какая из характеристик лучше отражает уровень жизни людей в этом городе?

374 Решите квадратное уравнение устно:

а) $x^2 - 8x + 12 = 0$; б) $x^2 - 11x + 30 = 0$; в) $x^2 + x - 6 = 0$.

375 Уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $3x_1 - 1$ и $3x_2 - 1$.

376 Для корней x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$ найдите значения выражений:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2$.

377 Один из корней квадратного уравнения $x^2 + 2x - c = 0$ равен $1-\sqrt{5}$. Найдите другой корень и значение параметра c.

378 Разложите на множители квадратные трехчлены, если это возможно:

а) $x^2 - 17x + 60$; б) $-6x^2 + 7x - 2$; в) $x^2 - 8$; г) $3x^2 + 4x + 5$.

379 Решите задачу:

а) Площадь прямоугольника равна 40 см^2, а его периметр равен 28 см. Найдите стороны прямоугольника.

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из его катетов на 3 см, а другой катет на 1,5 см больше первого. Найдите стороны треугольника.

380 При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 8x + k = 0$ не имеет корней?

381 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a - 2)x + a - 2 = 0$ имеет ровно один корень?

382 При каких значениях параметра m следующее уравнение имеет два различных корня: $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$?

383 Найдите корни многочлена:

1) $x^2 - 2x - 8$;
2) $x^2 - 7x + 12$;
3) $-x^2 + 11x - 18$;
4) $3x^2 - 13x + 4$;
5) $0,05x^2 - 0,12x + 0,04$;
6) $-0,02x^2 - 0,04x + 0,7$.

Определите для каждого из многочленов, каким промежуткам принадлежат найденные корни:

а) $(-8; 6)$; б) $[0; 5)$; в) $[-2; 5]$; г) $(1; 10)$; д) $(0; 2]$; е) $[2; 4]$.

Д **384** Найдите дисперсию следующего набора чисел:

а) 200, 201, 202, 199, 200; б) 0,2; 0; 0,2; 0,3; 0,1; 0,2; 0,2; 0,4.

385 В лаборатории производится анализ крови. Таблица содержит результаты пяти измерений гемоглобина (г/л) в одной пробе крови пациентки Петровой.

Номер измерения	1	2	3	4	5
Результат измерения (г/л)	120	150	110	50	120

а) Содержание гемоглобина в крови вычисляется как среднее значение результатов нескольких измерений. Найдите содержание гемоглобина в этой пробе.

б) Найдите дисперсию измерений.

в) Следуя правилу: *если квадрат отклонения некоторого значения x превышает дисперсию больше чем в 3,5 раза, то это значение выбраковывается (считается ненадежным) и в дальнейшем не учитывается*, определите, считается ли значение 50 надежным?

г) Найдите среднее арифметическое всех надежных значений. Что вы можете сказать о содержании гемоглобина у этой пациентки, если норма содержания гемоглобина в крови у женщин 120 – 150 г/л?

386 Найдите моду, медиану и размах следующего упорядоченного по возрастанию набора чисел:

а) 10, 20, 30, 40, 50; б) 1, 2, 2, 3, 4, 7; в) 11, 15, 16, 16, 28, 30.

387 В одной из компаний курьер получает 72 тысячи рублей в год. 20 специалистов этой компании получают по 120 тысяч в год. 10 ведущих специалистов этой компании получают по 180 тысяч рублей в год, начальники всех четырех департаментов этой компании получают по 240 тысяч рублей в год. Президент компании получает 600 тысяч рублей в год. Других работников в компании нет. Представьте эти данные в виде упорядоченного по возрастанию числового набора.

Найдите среднее значение, моду и медиану этого набора. На какой должности должен работать сотрудник, чтобы получать среднюю зарплату в этой компании? Сколько этот служащий получает в месяц?

388 Решите устно квадратное уравнение:

а) $x^2 + 12x + 20 = 0$; б) $x^2 - 4x - 12 = 0$; в) $x^2 + x + 7 = 0$.

389 Для корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - x - 12 = 0$ найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

390 Разложите на множители квадратные трехчлены, если это возможно:

а) $x^2 + 2x - 48$; б) $-7x^2 + 34x + 41$; в) $x^2 - 7$; г) $-2x^2 + x - 3$.

391 Площадь прямоугольника равна 90 м^2, а его периметр равен 38 м. Найдите стороны прямоугольника.

392 При каких значениях параметра t уравнение $x^2 - 6x - t = 0$ не имеет корней?

С **393*** Если к половине возраста Сашиного папы прибавить 8, то получится его возраст 15 лет назад. Сколько лет Сашиному папе?

394* В офисе одной компании работает 150 человек. Причем часть сотрудников этой компании всегда говорит правду, а все остальные всегда лгут. Каждому из сотрудников компании был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных сотрудников компании – лжецов или тех, кто говорит правду?» Когда 76 участников на этот вопрос ответили, что лжецов больше, опрос прекратили. Можно ли по результатам этого опроса определить, сколько в компании лжецов.

2. Случайные события и их частота

...Случайность главным образом зависит от нашего знания.

Якоб Бернулли (1654–1708), швейцарский математик

В предыдущем пункте мы вспомнили, какие статистические показатели нам известны и научились рассчитывать новый показатель – дисперсию набора. Как мы знаем, дисперсия характеризует **разброс значений в наборе чисел**, чем она значительнее, тем больше неопределенности и случайности в анализируемой ситуации. В этом пункте мы подробнее остановимся на случайном характере многих окружающих нас явлений, для этого выявим еще одну новую для нас статистическую характеристику.

Рассмотрим следующий пример.

В таблице собраны данные о посещаемости одного из кинотеатров в зимние каникулы (число посетителей указано с точностью до десятков).

Понедельник 31.12	60	Понедельник 07.01	200
Вторник 01.01	50	Вторник 08.01	200
Среда 02.01	70	Среда 09.01	200
Четверг 03.01	120	Четверг 10.01	180
Пятница 04.01	**300**	Пятница 11.01	200
Суббота 05.01	**430**	Суббота 12.01	**360**
Воскресенье 06.01	**340**	Воскресенье 13.01	**300**

Сначала вычислим *среднее значение* ряда этих чисел:

$$\frac{60+50+70+120+300+430+340+200+200+200+180+200+360+300}{14}=\frac{3010}{14}=215.$$

Теперь вычислим характеристики разброса.

Вычислим *размах* этого набора чисел: 430 – 50 = 380, его величина показывает, что посещаемость очень неравномерна по своим значениям. При этом существенно отличаются друг от друга не только крайние показатели посещаемости, но и остальные числа внутри этого набора. Поэтому *дисперсия*, характеризующая отклонения результатов измерений от среднего их значения, будет очень значительной (составит около 13 000).

Как мы видим, посещаемость изменяется день ото дня. Это происходит потому, что она зависит от самых разнообразных факторов: от погоды – в морозную погоду вместо прогулки лучше пойти в кино; от пробок на дороге – из-за них можно опоздать на киносеанс и т. д.

События реальной жизни различаются по степени своей определенности: одни из них – наступят однозначно, другие – не произойдут никогда, а некоторые – могут либо произойти, либо нет. Например, после марта точно наступит апрель, но не наступит январь, а вот выпадение снега в начале апреля может как произойти, так и не произойти. Соответственно, события можно разделить на *достоверные*, *невозможные* и *случайные*. Уточним эти понятия.

***Определение* 1.** Событие называется **достоверным**, если оно заведомо произойдет.

***Определение* 2.** Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдет.

***Определение* 3.** Событие называется **случайным**, если оно может произойти, а может, и не произойти.

В жизни мы чаще всего имеем дело со случайными событиями, о которых важно знать, как часто они приводят к нужному нам результату. Так, посещаемость кинотеатра – случайное событие, и директор кинотеатра интересуется прежде всего тем, как часто посещаемость выше среднего значения 215. В нашей таблице таких случаев 5 из 14 (они выделены жирным шрифтом), то есть более чем в трети случаев. Однако если эти 5 случаев встретятся в годовой таблице, то это составит уже менее 2% – принципиально иная картина. Поэтому чтобы судить о частоте нужного события, следует учитывать не только количество подходящих результатов, но и *отношение* этого числа к общему числу рассмотренных результатов.

Частота события – еще одна важная статистическая характеристика, которая широко используется на практике. Для ее определения, как правило, проводят специальные эксперименты, в которых вычисляют число нужных (*благоприятных*) результатов и делят его на общее число результатов. В математике производимые действия (например, подбрасывание игральной кости – кубика, на гранях которого отмечены точки от 1 до 6) называют *испытаниями*, а их результаты (выпало то или иное число точек) – *исходами*. Тогда математическое определение частоты события можно сформулировать так.

***Определение* 4. Частотой** события A в данной серии испытаний называется отношение числа M испытаний, в которых это событие произошло, к числу N всех проведенных испытаний, то есть $W(A)=\frac{M}{N}$, где $W(A)$ – частота события A.

Например, если нам требуется установить частоту выпадения пяти очков при подбрасывании игрального кубика, а в серии из 30 бросков пять очков выпало 7 раз, то частота выпадения пяти очков в нашей серии испытаний равна $\frac{7}{30}$.

Замечание. Очевидно, что частота случайного события выражается правильной дробью, значение которой заключается между 0 и 1. Чем ближе эта дробь к 1, тем чаще происходило данное событие, а чем ближе к 0 – тем реже. Частота достоверного события равна 1, так как $M = N$; а частота невозможного события равна нулю, так как $M = 0$. Как и любую долю величины, частоту можно выразить в процентах.

Рассмотрим примеры нахождения частоты случайного события.

Пример 1.

Чтобы определить, каким образом форма крыльев самолета влияет на его скорость, в классе проводили эксперимент по запуску бумажных самолетиков. Ученики разбились на тройки: двое запускали самолетики – один с узкими, а другой – с широкими крыльями. Третий фиксировал, какой самолет прилетел быстрее, и подсчитывал результаты в таблице:

Результаты группы 1											
№ испытания / Исход испытания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Результат
С узкими крыльями	∨			∨		∨		∨		∨	5
С широкими крыльями		∨	∨		∨		∨		∨		5

После того как каждая из девяти групп повторила испытание 10 раз, они просуммировали результаты каждой группы и свели их в общую таблицу:

Общее число испытаний	Число исходов случайного события	
	С узкими крыльями	С широкими крыльями
$10 \cdot 9$	$5 + 7 + 8 + 8 + 9 + 8 + 8 + 10 + 9$	$5 + 3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 0 + 1$

Сравните частоты прилета самолета каждого вида. Какую гипотезу могли выдвинуть ребята в результате проведения этой серии экспериментов?

Решение:

Общее число всех испытаний, проведенных девятью группами, равно 90. Число исходов, в которых быстрее был самолет с узкими крыльями, равно 72. Отсюда частота этого события составляет $72 : 90 = 0{,}8$. Число исходов, в которых быстрее был самолет с широкими крыльями, равно 18. Частота этого события составляет $18 : 90 = 0{,}2$.

Сравнивая полученные частоты, мы видим, что самолет с узкими крыльями чаще прилетал первым. Ребята могли предположить, что чем у́же крылья самолета, тем бо́льшую скорость он может развивать. Действительно, самолету с небольшими по площади крыльями приходится преодолевать меньшее сопротивление воздуха, и поэтому он может развивать бо́льшую скорость.

Обратим внимание на то, что учащиеся из первой группы, опираясь только на свои результаты, могли выдвинуть неверную гипотезу: форма крыльев самолета не влияет на скорость самолета. Именно поэтому для повышения достоверности полученных результатов эксперимент повторяют *многократно*.

Мы можем теперь сформулировать следующий способ нахождения частоты.

Чтобы найти частоту случайного события нужно:

1. Сформулировать событие, частоту которого необходимо найти.
2. Многократно повторить эксперимент, воспроизводящий это событие, либо воспользоваться статистическими данными о его проведении.
3. Подсчитать число всех проведенных испытаний – N.
4. Подсчитать число исходов, в которых это событие произошло – M.
5. Вычислить частоту события $W(A)=\frac{M}{N}$.

Пример 2.

В таблице приведено количество выпадения решки в серии опытов, проведенных восьмиклассниками на уроке математики. Чему равна частота выпадения решки: а) в каждом из испытаний; б) в общем итоге?

Номер испытания	Количество выпадения решки	Количество испытаний
1	4	10
2	53	100
3	101	200
Итого:	**158**	**310**

Решение:

Искомые частоты находим по формуле $W(A)=\frac{M}{N}$.

а) $W(A_1) = 0{,}4$; $W(A_2) = 0{,}53$; $W(A_3) = 0{,}505$;

б) $W(A_{1-3}) = 0{,}50967... \approx 0{,}51$.

Ответ: 0,4; 0,53; 0,505; 0, 51.

Из рассмотренных нами примеров видно, что значение частоты одного и того же случайного события зависит от количества проведенных испытаний. Так, в эксперименте с решкой частота ее выпадения в первом испытании составляет 0,4, во втором – 0,53, в третьем – 0,505, а при итоговом подсчете она приблизительно равна 0,51. Однако можно заметить, что *при увеличении количества испытаний* значения относительной частоты выпадения решки *все меньше и меньше отличаются друг от друга*.

Этот опыт с монетой неоднократно проводили выдающиеся математики прошлого: Паскаль, Ферма, Гаусс. Для этого каждому экспериментатору пришлось подбрасывать монету до нескольких тысяч раз. Сейчас подобный опыт можно смоделировать на компьютере. Одни из его результатов описаны с помощью графика на рис. 1.

Анализируя график зависимости частоты W от числа испытаний N, можно заметить, что частота выпадения решки обладает свойством устойчивости, а именно: с ростом числа испытаний ее значения устанавливаются вблизи одного и того же числа 0,5.

Оказывается, подобная устойчивость частоты свойственна и другим массовым случайным событиям, например демографическим явлениям.

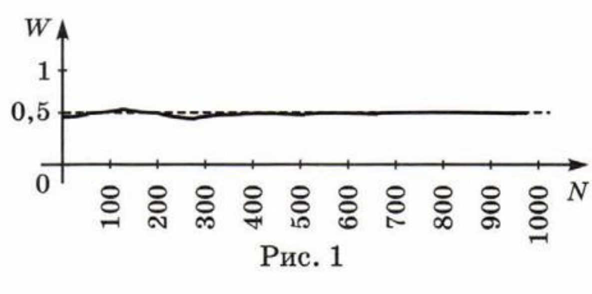


Рис. 1

Исследователи, анализирующие большие массивы *случайных* событий, пришли к удивительному выводу: *случайные события подчиняются определенным правилам*. О том, какие это правила и как они используются на практике, мы поговорим в следующем пункте.

К **395** Наташа выписала свои отметки по алгебре за IV четверть и получила следующий набор значений: 3, 2, 3, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 5. Она решила сравнить свои отметки за IV четверть с отметками, полученными ею за III четверть, и тоже выписала их: 4, 5, 4, 4, 5, 5, 5, 4.

1) Укажите среднее значение, размах и моду набора отметок за IV четверть.

2) Дисперсия какого набора выше за III или IV четверть? В какой из четвертей Наташа показывала более стабильные результаты?

3) Какую из отметок получала Наташа чаще других отметок в III четверти? в IV четверти?

4) В какой из этих четвертей Наташа получала «отлично» чаще? Достаточно ли для ответа на этот вопрос указать количество пятерок за каждую из четвертей? Какую новую статистическую характеристику вы могли бы предложить для ответа на этот вопрос? Сравните свой вариант со статистической характеристикой, описанной в учебнике на стр. 103.

396 На дне рождения гости играли в «Фанты», и в мешке для фантов оказались следующие вещи гостей: часы наручные, брелок от ключей, три сотовых телефона, браслет и два кольца.

1) Среди следующих высказываний, описывающих продолжение этой игры, найдите истинные и ложные.

а) Сотовый телефон вынимали из мешка 3 раза.

б) Браслет вынимали из мешка 2 раза.

в) Частота, с которой вынимали сотовый телефон, составила 0,375.

г) Частота, с которой вынимали часы, равна 0,125.

д) Кольца из мешка вынимали с той же частотой, что и телефоны.

2) Предположите, по какому признаку следующие события были распределены в три группы?

1.	2.	3.
Первым из мешка вынут брелок.	Из мешка вынули предмет, принадлежащий одному из гостей.	Из мешка вынули 4 телефона.
Сотовый телефон вынимали из мешка 3 раза подряд.	На девятый раз мешок оказался пуст.	Из мешка вынули белого кролика.

3) Дайте названия этим группам, сопоставьте свои варианты с классификацией событий на стр. 103.

397 Игральный кубик подбросили 500 раз. При этом число 1 выпало 99 раз, число 2 – 63 раза, число 3 – 76 раз, число 4 – 96 раз, число 5 – 84 раза, а число 6 – 82 раза. Вычислите (с точностью до сотых) частоту наступления следующих случай-ных событий:

а) выпадение числа 1; в) выпадение числа 3; д) выпадение числа 5;

б) выпадение числа 2; г) выпадение числа 4; е) выпадение числа 6.

398 а) Проведите 15 испытаний по подбрасыванию пятирублевой монеты и запишите, сколько раз у вас выпал «орел» и сколько раз выпала «решка». Используя калькулятор, вычислите с точностью до сотых частоту выпадения «решки» в проведенной серии испытаний.

б) Проведите 30 испытаний по подбрасыванию пятирублевой монеты и запишите, сколько раз у вас выпал «орел» и сколько раз выпала «решка». Вычислите частоту выпадения «решки» в проведенной серии испытаний. Как изменилась частота выпадения «решки»?
Сравните свои результаты с результатами ваших одноклассников.

в) Занесите результаты всех испытаний по подбрасыванию монеты в вашем классе в одну таблицу и вычислите с точностью до сотых частоту выпадения «решки». Как изменилась частота? Что вы замечаете?

Замечание: Познакомившись с условиями исследования, изложенными выше, подумайте, как организовать данную практическую работу, чтобы сэкономить время ее проведения.

399 а) При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Какие книги вы в основном читаете: бумажные или электронные?». Ответ «Бумажные» выбрали 189 человек. После подсчета оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,63. Сколько человек принимало участие в этом опросе? Сколько человек назвали другой вариант ответа?

б) При проведении социологического опроса, в котором приняли участие 250 человек, был задан вопрос: «Делаете ли вы по утрам зарядку?». После подсчета оказалось, что частота ответа «да, каждый день» среди всех ответов, составила 0,34. Сколько из опрошенных делают по утрам зарядку? Сколько человек назвали другие варианты ответа?

400 В задании приведено стихотворение Николая Заболоцкого, содержащее 456 букв. Используя калькулятор, вычислите (с точностью до тысячных) частоту появления букв «О», «И», «Т», «К».

Я воспитан природой суровой,
Мне довольно заметить у ног
Одуванчика шарик пуховый,
Подорожника твердый клинок.
Чем обычней простое растенье,
Тем живее волнует меня
Первых листьев его появленье
На рассвете весеннего дня.
В государстве ромашек, у края,
Где ручей, задыхаясь, поет,
Пролежал бы всю ночь до утра я,
Запрокинув лицо в небосвод.
Жизнь потоком светящейся пыли
Все текла бы, текла сквозь листы,
И туманные звезды светили,
Заливая лучами кусты.
И, внимая весеннему шуму
Посреди очарованных трав,
Все лежал бы и думал я думу
Беспредельных полей и дубрав.

По статистике эти буквы повторяются в осмысленных текстах со следующей частотой: из 1000 знаков буква «О» встречается в среднем 109 раз; «И» – 75; «Т» – 63; «К» – 34 раза. Почему полученные вами частоты не совпадают с приведенными статистическими данными?

П **401** Термин «функция» (лат. functio – «исполнение», «совершение») впервые появляется в 1692 г. в трудах немецкого ученого Г. Лейбница, притом совсем не в том понимании, в котором его используют сейчас. И только в 1718 г. этот термин уже в смысле, близком к современному его толкованию, встречается у совсем другого ученого.

Решите эти квадратные неравенства с помощью графика квадратичной функции. Расположив наименьшие целые неотрицательные решения каждого из них в порядке убывания, узнайте имя этого швейцарского ученого:

И	$4x^2+4x+1 \geqslant 0$	**Е**	$x^2-4x-21>0$
Л	$-16x^2-10x+9 \leqslant 0$	**Л**	$15x^2-4x-35>0$
Р	$x^2-3x-18>0$	**Б**	$x^2-19x+90 \leqslant 0$
У	$4-x^2<0$	**Н**	$2x^2-8x>0$

402 Найдите значения x, при которых данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x^2+5x}$; г) $\sqrt{x^2+x+9}$;

б) $\sqrt{x^2-27}$; д) $\sqrt{-x^2+3x-4}$;

в) $\sqrt{x^2+13x+42}$; е) $\sqrt{-9x^2+42x-49}$.

403 При каких значениях параметра a решением неравенства $x^2-ax+4>0$ является любое действительное число?

404 При каких значениях параметра a неравенство $x^2+(a+1)x+4 \geqslant 0$ имеет хотя бы одно решение?

405 Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-12a+36}{a^2-36}$; б) $\dfrac{9-6t+t^2}{27-t^3}$; в) $\dfrac{d^2-64}{d^2+d-56}$; г) $\dfrac{c^2+3c-10}{c^2-10c+16}$.

406 Выполните действия:

а) $\dfrac{m}{3d-9}+\dfrac{m}{5d-15}$; б) $\dfrac{n+10k}{n^2-25k^2}-\dfrac{n+5k}{n^2-5nk}$; в) $\dfrac{b^2+9b+2}{b^3-1}-\dfrac{1-4b}{b^2+b+1}-\dfrac{4}{b-1}$.

407 Упростите выражение и найдите его значение при $m=-0{,}0127$:

$$\frac{8-9m^2}{9m^2+24m+16}:\left(\frac{1}{6m+8}-\frac{1}{6m-8}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{6m+8}{16-12m}.$$

408 Упростите выражение:

а) $\dfrac{4\sqrt{mn}}{m-n}+\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; б) $\dfrac{m\sqrt{m}+m\sqrt{n}}{n\sqrt{m}-n\sqrt{n}}:\dfrac{m+2\sqrt{mn}+n}{mn-n^2}$.

409 При каких значениях k, где $k \in \mathbf{Z}$, алгебраическая дробь $\dfrac{k^3+9k^2-7k+1}{k-1}$ является целым числом?

Д **410** С помощью напарника или группы одноклассников проведите следующее исследование:

1) Проведите 20 испытаний по подбрасыванию игрального кубика и запишите в таблице результат каждого испытания. Вычислите с точностью до сотых частоту выпадения 6 очков в проведенной серии испытаний.

2) Проведите 40 испытаний по подбрасыванию игрального кубика и запишите в таблице результат каждого испытания. Вычислите частоту выпадения 6 очков в проведенной серии испытаний.

Что вы замечаете? Увеличьте число испытаний. Подтвердили ли ваши испытания известное вам свойство частоты?

411 а) При проведении социологического опроса выпускникам школы был задан вопрос: «Какие профессии, на Ваш взгляд, являются наиболее перспективными?» Ответ «Инженер» выбрали 105 человек. После подсчета оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,21. Сколько ребят принимало участие в этом опросе?

б) В социологическом опросе, в котором приняло участие 450 участников различных предметных олимпиад, был задан вопрос: «Для чего вы участвуете в олимпиадах?» После подсчета оказалось, что частота ответа «Чтобы проявить себя, проверить свои знания» среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,38. Сколько ребят дали такой ответ?

412 В задании приведен отрывок из романа Александра Грина «Алые паруса». Используя калькулятор, вычислите (с точностью до тысячных) частоту появления букв «А», «Н», «П».

«Не помня, как оставила дом, Ассоль бежала уже к морю, подхваченная неодолимым ветром события; на первом углу она остановилась почти без сил; ее ноги подкашивались, дыхание срывалось и гасло, сознание держалось на волоске. Вне себя от страха потерять волю, она топнула ногой и оправилась. Временами то крыша, то забор скрывали от нее алые паруса; тогда, боясь, не исчезли ли они, как простой призрак, она торопилась миновать мучительное препятствие и, снова увидев корабль, останавливалась облегченно вздохнуть.»

По статистике эти буквы повторяются в осмысленных текстах со следующей частотой: из 1000 знаков буква «А» встречается в среднем 75 раз; «Н» – 63; «П» – 28 раз. Почему полученные вами частоты не совпадают с приведенными статистическими данными?

413 Решите квадратные неравенства:

а) $2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$; в) $-x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$;

б) $81 - x^2 \geqslant 0$; г) $4x^2 - 2x + 1 < 0$.

414 При каких значениях параметра a неравенство $-x^2 + (a + 1)x - 4 > 0$ не имеет решений?

415 Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^2+14a+49}{b^2-49}$; б) $\dfrac{a^3-125}{a^2-10a+25}$; в) $\dfrac{k^2-17k+72}{k^2-18k+81}$; г) $\dfrac{m^2-m-20}{m^2+m-12}$.

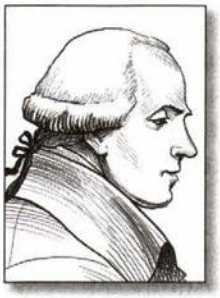
416 Упростите выражение:

а) $\frac{b}{a-b}-\frac{a^3-ab^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a^2-2ab+b^2}-\frac{b}{a^2-b^2}\right)$; б) $\left(d-\frac{1-2d^2}{1-d}+1\right):\left(1-\frac{1}{1-d}\right)$.

C **417*** Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?

418* Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Придумайте код, открывающий сейф.

3. Случайные события и их вероятность



Теория вероятностей по существу представляет собой не что иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям.

П.-С. Лаплас (1749–1827),
французский математик, физик, астроном,
один из создателей теории вероятностей

В предыдущем пункте мы выделяли достоверные, невозможные и случайные события. Так, например, при бросании двух игральных костей выпадение суммы очков, равной 1, является невозможным событием, суммы очков, большей 1 – достоверным событием, а суммы в 7 очков – случайным событием.

При этом определить достоверное и невозможное события можно чисто теоретически (например, сделать вывод о том, что сумма очков при бросании двух кубиков всегда больше 1). А вот найти частоту *случайного* события можно лишь путем большого числа испытаний.

Возникает вопрос: возможно ли судить о частоте *случайных* событий без проведения испытаний? Подобное суждение очень пригодилось бы на практике, ведь нам часто бывают нужны различные прогнозы – погоды, шансов на победу того или иного участника соревнований и т. д.

Потребность прогнозировать *случайные* события возникла давно и привела к «рождению» нового раздела математики – **теории вероятностей.** В данном пункте мы познакомимся с основными понятиями этой теории и задачами, которые она позволяет решать.

Вначале рассмотрим *равновозможные* и *несовместные* события. Уточним эти понятия.

События являются **равновозможными**, если ни один из его исходов не имеет преимущества перед остальными. Например, бросая игральную кость, мы можем ожидать *в равной степени* любой из шести исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков». Если же к одной из граней кубика приклеить кусочек пластилина, то больше шансов, что брошенный кубик упадет на стол именно этой гранью. В этом случае указанные исходы перестанут быть равновозможными.

Если мы будем бросать сразу два кубика, то на одном кубике может выпасть, например, 4 очка, а на другом – 3 очка, поэтому такие события называют **совместными.** А вот выпадение 3 очков и выпадение 4 очков на одном и том же кубике одновременно произойти не могут, поэтому такие события называют **несовместными.**

В математике для оценки достоверности равновозможных и несовместных событий используется новая для нас численная характеристика. Чтобы ее ввести, решим следующую задачу.

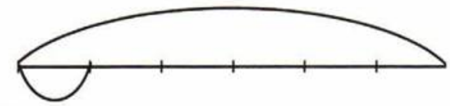
Задача 1.

Оценить, какой из двух прогнозов об исходе броска игрального кубика более вероятен (правдоподобен): «Выпадет максимальное число очков» или «Выпадет четное число очков».

Решение:

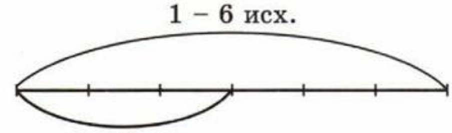
При бросании игрального кубика имеется всего шесть возможных исходов: 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков, эти исходы несовместны.

1) Максимально возможное число очков получается только в одном случае – когда выпадет 6. Все события равновозможны, поэтому доля, которая приходится на данный исход, составляет $1:6 = \frac{1}{6}$.



Значит, достоверность выпадения максимального числа очков равна $\frac{1}{6}$.

2) Событие «выпадет четное число очков» произойдет в трех несовместных случаях: когда выпадет либо 2, либо 4, либо 6 очков.



Следовательно, на часть, соответствующую четному числу очков, приходится 3 из 6 равновозможных исходов. Значит, достоверность выпадения четного числа очков можно выразить частным $3:6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

3) Мы можем сравнить полученные численные характеристики и на этом основании ответить на вопрос задачи.

Так как $\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$, то выпадение максимального числа очков менее вероятно, чем выпадение четного числа очков. Разумность этого вывода подтверждается практикой.

Ответ: более правдоподобен прогноз о выпадении четного числа очков.

Обобщим наши рассуждения. Рассмотрим некоторое испытание, которое может завершиться одним из n возможных исходов, и все они *попарно несовместны* и *равновозможны*.

Пусть m из этих n исходов приводят к наступлению некоторого события A (будем называть такие события *благоприятными* для A). Тогда *вероятностью* события A при данном испытании естественно считать число $\frac{m}{n}$.

Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события называют отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов (для испытаний с равновозможными попарно несовместными исходами)[4].

Обозначают: $p(A)=\frac{m}{n}$, где $p(A)$ – вероятность случайного события A, m – количество возможных благоприятных исходов, n – количество всех возможных исходов.

Замечание. Применим данное определение к невозможному и достоверному событиям.

Событие C невозможно, если не существует ни одного благоприятного исхода. Значит, в этом случае $m = 0$ и, следовательно, $p(C)=\frac{0}{n}=0$.

Для достоверного события D все исходы испытания являются благоприятными, поэтому в данном случае $m=n$, и, значит, $p(D)=\frac{n}{n}=1$.

Ясно, что значение вероятности наступления случайного события заключается между 0 и 1, и чем ближе это значение к единице, тем достовернее его наступление.

Далее равновозможные события в соответствии с принятой в математике терминологией мы будем называть *равновероятными*. Корректность такого определения легко объяснить. Пусть B – один из n равновозможных исходов некоторого испытания. Тогда для наступления события B имеется ровно один благоприятный исход, поэтому $p(B)=\frac{1}{n}$. Такую же вероятность будут иметь и все остальные исходы.

Решим несколько примеров, в которых применяется введенное определение.

Пример 1

В лыжных соревнованиях восьмиклассников приняли участие 6 учеников из 8 «А», 5 – из 8 «Б» и 9 – из 8 «В». Судья произвольным образом раздал им номера: от 1 до 20. Какова вероятность того, что первый номер достанется ученику 8 «А»?

Решение:

Пусть все участники соревнований до раздачи номеров были выписаны в список. Тогда равновероятными являются следующие события: первый номер достался первому по списку, второму по списку, ..., двадцатому по списку участнику. Поэтому количество всех возможных исходов: кому достанется первый номер, есть $n = 20$. Благоприятными для события A = «первый номер достался ученику из 8 «А» являются $m = 6$ исходов.

Поэтому искомая вероятность равна $p(A)=\frac{6}{20}=0{,}3$.

Ответ: 0,3.

Пример 2.

Одновременно подброшены три монеты. Определите вероятность того, что ровно две из них упадут орлом вверх.

Решение:

Если подбросить монету, то два результата «выпал орел» и «выпала решка» являются равновероятными.

[4] В современном варианте этого определения используются понятия множества, подмножества и их элементов. С ними вы познакомитесь позже.

Обозначим выпадение орла буквой О, а решки – буквой Р, и выпишем все возможные исходы этого испытания: ООО, РОО, ОРО, ООР, ОРР, РОР, РРО, РРР – их всего восемь, и они несовместны и равновероятны.

Благоприятными для события A = «ровно две из трех монет упадут орлом» являются три исхода: Р<u>ОО</u>, <u>ОО</u>Р, <u>О</u>Р<u>О</u>. Поэтому искомая вероятность равна $p(A)=\frac{3}{8}=0{,}375$.

Ответ: 0,375.

Обобщая способ решения примеров 1 и 2, приходим к следующему способу анализа и решения «вероятностных» задач.

Чтобы вычислить вероятность случайного события нужно:

1. Установить, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Понять, что исходы испытания несовместны и равновероятны.
3. Подсчитать число всех возможных исходов испытания – n.
4. Сформулировать событие A, вероятность наступления которого необходимо найти.
5. Подсчитать число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию – m.
6. Вычислить вероятность рассматриваемого события: $p(A)=\frac{m}{n}$.

Рассмотрим задачи, где нужно найти и сравнить вероятности нескольких событий.

Пример 3.

Три подруги собрались пойти в гости и решили с помощью жребия определить, кому из них идти в магазин за тортом. Они договорились бросить две монеты, и если выпадут два орла, то за тортом пойдет Аня, орел и решка – Вика, две решки – Даша. Является ли такой жребий справедливым?

Решение:

Жребий является справедливым, если вероятности выпадения указанных в условии задачи комбинаций монет (два орла, орел и решка; две решки) будут одинаковы. Вычислим эти вероятности.

Испытание имеет 4 несовместных равновероятных исхода: ОО, ОР, РО, РР. Нам нужно найти вероятности событий A = «выпало два орла», B = «выпали орел и решка» и C = «выпали две решки». По определению вероятности, они равны:

$$p(A)=\frac{1}{4},\ p(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ p(C)=\frac{1}{4}.$$

Значит, вероятность отправиться за тортом у Вики вдвое выше, чем у любой из двух других девочек.

Ответ: описанный в задаче жребий справедливым не является.

Пример 4.

При бросании двух игральных костей сумма выпавших очков может принимать значения от 2 до 12. Выпадение какой суммы имеет наименьшую, а какой – наибольшую вероятность?

Решение:

Составим таблицу возможных исходов испытания, в которой верхний ряд указывает количество очков, выпавших на первой кости, левый – на второй кости, а на пересечении соответствующих им столбцов и строк – суммарное количество выпавших очков.

Как мы видим из таблицы, суммы 2 и 12 встречаются по одному разу, 3 и 11 – по два раза, ..., сумма 7 – шесть раз.

вторая кость \ первая кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Обозначим A_n событие «Сумма выпавших очков равна n», где $2 \leqslant n \leqslant 12$. Из таблицы видно, что наименьшую вероятность имеют события A_2 и A_{12}, их вероятности равны:

$$p(A_2)=\frac{1}{36} \text{ и } p(A_{12})=\frac{1}{36}.$$

Наибольшая вероятность – у события A_7, она равна $p(A_7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Ответ: наименьшую вероятность имеет выпадение суммы в 2 и в 12 очков, а наибольшую вероятность – выпадение суммы в 7 очков.

Итак, классическое определение вероятности случайного события «работает» только в случае, когда каждый из исходов испытания является равновозможным. Но в реальной жизни события, как правило, неравновозможны. Например, форма объектов всегда имеет отклонения от идеальной формы геометрических тел, пусть и минимальные; плотность материала, из которого сделан некоторый предмет, в разных его точках различна и т. д. Как же определить вероятность наступления того или иного *реального* события?

Как мы видели в предыдущем пункте, в подобных случаях частота случайного события устанавливается с помощью реальных испытаний. Однако уже достаточно давно, сотни лет назад, сравнивая результаты практических опытов с результатом, который дает теоретический расчет, ученые прошлого обнаружили удивительную закономерность: **частота случайного события при достаточно большом числе испытаний близка к его вероятности**. Так, ранее мы выяснили, что частота выпадения «решки» устанавливается ***вблизи*** числа $\frac{1}{2}$, и точно то же самое значение получается при вычислении вероятности выпадения решки по формуле: $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$.

Этот вывод послужил основанием для введения понятия *статистической вероятности.*

Определение статистической вероятности

Статистической вероятностью случайного события A называется число, около которого принимает значения частота этого события ***при достаточно большом числе испытаний***.

Приведем пример использования статистической вероятности.

Пример 4.

По информации из родильных домов города выяснилось, что из 1200 младенцев, появившихся на свет в прошедшем году, 606 оказались мальчиками. Исходя из этих данных, найти статистическую вероятность рождения мальчика в этом городе.

Решение:

Переведем статистическую информацию «из 1200 младенцев 606 мальчиков» на язык теории вероятности: в результате 1200 испытаний событие A = «родился мальчик» произошло 606 раз.

Частоту рождения мальчика находим по формуле $W(A)=\frac{M}{N}=\frac{606}{1200}=0{,}505$. Значит, статистическая вероятность рождения мальчика в этом городе приблизительно равна 0,505.

Ответ: $p_{\text{стат.}} \approx 0{,}505$.

Связь классической и статистической вероятностей можно описать следующим образом. Классическая вероятность вычисляется *по формуле* без проведения каких-либо испытаний. Статистическая вероятность, напротив, вычисляется *эмпирически* после проведения большого числа испытаний. При достаточно большом количестве испытаний эти вероятности примерно равны.

Статистическая вероятность широко применяется в естествознании, экономике, производстве, сельском хозяйстве, медицине. Например, только экспериментальным путем можно выявить признаки заболевания, позволяющие с высокой вероятностью поставить человеку правильный диагноз; определить всхожесть семян в данной почве, чтобы грамотно провести посев и получить высокий урожай, и т. д.

Итак, для расчета вероятности случайного события можно использовать следующий алгоритм:

419 Определите, каким невозможным, достоверным или случайным является следующие событие.

1) При измерении двух углов равнобедренного треугольника получены одинаковые градусные меры.

2) При измерении двух углов при основании равнобедренного треугольника получены одинаковые градусные меры ($\pm 1°$).

3) При измерении углов треугольника получено два прямых угла.

4) На любом развороте книги номера страниц одинаковой четности.

5) На любом развороте книги номера страниц разной четности.

6) На любом развороте книги номер одной из страниц делится на 5.

Придумайте свои примеры невозможного, достоверного и случайного события.

420 Выберите пару, события которой могут произойти одновременно:

1) «сейчас утро» – «сейчас идет снег»;

2) «сейчас утро» – «сейчас месяц июль»;
3) «сейчас месяц июль» – «сейчас идет снег».

Какие события представлены в оставшейся паре? Познакомьтесь с их названием, обратившись к тексту стр. 110 – 111.

421 Из событий: «Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 10 баллов»; «Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 1 балл»; «Восьмиклассница Оля получила за итоговый тест по алгебре 10 баллов», составьте пару совместных и пару несовместных событий.

422 1) Восьмиклассник подбросил игральный кубик 10 раз и определил, что частота исхода «выпало менее 7 очков» равна 1, а частота исхода «выпало более 7 очков» равна нулю. Можно ли было определить эти частоты *до* проведения испытания?

2) Оцените, какой прогноз об исходе броска игрального кубика является более правдоподобным: «Выпадет менее 7 очков» или «Выпадет более 7 очков»? Какой из этих исходов имеет явное преимущество перед другим?

3) Имеется ли преимущество одних исходов над другими среди исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков»? Как можно назвать такие исходы? Познакомьтесь с их названием на стр. 110.

423 1) Игральный кубик брошен 10 раз. Можно ли сделать точный прогноз о частоте исхода «на кубике выпало четное количество очков»?

2) Попробуйте оценить, какой из двух прогнозов об исходе броска более правдоподобен: «выпадет максимальное число очков» или «выпадет четное число очков».

3) Сопоставьте свой способ оценки прогнозов со способом, предложенным на стр. 112. Какая числовая характеристика используется в математике для подобных оценок?

424 К праздничному концерту было подготовлено три выступления семиклассников, четыре – восьмиклассников и пять – девятиклассников. Чтобы определить порядок выступлений, ребята «вслепую» вытаскивают карточки с номерами от 1 до 12. Какова вероятность того, что первыми выступят восьмиклассники?

425 1) В сборнике билетов по физике всего 20 билетов, в восьми из них встречается вопрос по оптике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику а) достанется вопрос по оптике; б) не достанется вопроса по оптике.

2) В таксопарке 12 иномарок и 10 машин отечественного производства. Найдите вероятность того, что после заказа такси к клиенту приедет а) иномарка; б) машина отечественного производства.

Найдите сумму полученных в каждой из задач вероятностей. Как вы думаете, почему получено такое значение сумм? Будет ли в аналогичных ситуациях наблюдаться такое же свойство? Сформулируйте гипотезу о сумме вероятностей исходов испытания.

426 1) Докажите следующее свойство. Пусть испытание имеет n исходов. Если m исходов благоприятствуют событию A, а остальные $n - m$ исходов – событию B, то $p(A)+p(B)=1$. Как называются события A и B, рассматриваемые в этом свойстве?

2) Являются ли события «достанется билет по оптике» и «не достанется билет по оптике» из предыдущей задачи 1 несовместными? Являются ли события «приедет иномарка» и «приедет отечественный автомобиль» из предыдущей задачи 2 несовместными? Пользуясь доказанным свойством, решите предыдущее задание (1б; 2б) другим способом.

427 В ящике находятся 4 белых, 1 красный и 3 черных шара. Наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар:

а) белый; в) черный; д) не синий; ж) черный или белый

б) красный; г) синий; е) не белый; з) красный или белый.

428 В 8 «А» классе 25 человек. Из них по жребию выбирают двух дежурных. Найдите вероятность того, что дежурить пойдет ученик этого класса Вася Петров.

429 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 40 спортсменов, среди них семь прыгунов из Голландии и два прыгуна из Боливии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой.

а) Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Боливии.

б) Найдите вероятность того, что первым будет выступать прыгун из Голландии.

430 Известно, что Сережа родился в ноябре. Найдите вероятность того, что он родился а) 31-го числа; б) 13-го числа; в) до 13-го числа (не включительно); г) после 13-го числа.

431 Одновременно бросили 3 кубика. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков а) равна 2; б) равна 3; в) меньше 20; г) больше 20; д) равна 17; е) равна 15.

432 Книга раскрыта в произвольном месте. Найдите вероятность того, что:

а) разность номеров страниц на развороте равна 0;

б) разность номеров страниц на развороте равна 1;

в) сумма номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 2;

г) сумма номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 3;

д) произведение номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 1;

е) произведение номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 0;

ж) произведение номеров страниц на развороте оканчивается цифрой 8.

433 Двое бросают монету: один бросил ее 10 раз, другой – 11 раз. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

П **434** «Выиграл сражение не тот, кто дал хороший совет, а тот, кто взял на себя *ответственность* за его выполнение и приказал выполнить». Это слова одного из выдающихся военачальников и государственных деятелей XVIII–XIX веков. Он имел исключительную память, работоспособность, тонкий ум, полководческий и дипломатический гений. Этот великий человек так сильно поразил народное воображение и породил столько споров, что они не утихают до сих пор. Вы сможете узнать, о ком идет речь, расположив наименьшие (или единственные) корни дробно-рациональных уравнений в порядке возрастания:

Л	$\dfrac{x^2-7x}{x^2-49}=0$	**Е**	$\dfrac{1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+4}{x^3-8}$
Н	$1+\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{16}{(x+1)(x+2)}=0$	**Н**	$\dfrac{3(x-1)^2}{(2-3x)(3x+2)}=\dfrac{3x^2-7x+3}{9x^2-4}$
О	$\dfrac{4}{9x^2-1}+\dfrac{1}{3x^2-x}=\dfrac{4}{(3x-1)^2}$	**О**	$\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{x+1}{x-3}+\dfrac{x}{2x-1}$
А	$\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{32}{x^2-16}$	**П**	$\dfrac{6x^2+12x}{x+6}=0$

Как связано это имя с историей нашего отечества?

435 Найдите все значения a, при которых уравнение $\dfrac{x^2+10x-24}{x-a}=0$ имеет единственный корень.

436 Решите задачу, составив дробно-рациональное уравнение.

а) В 6 часов утра туристы отправились в поход по реке на плоту, а в 8 ч 40 мин вслед вышел катер и догнал плот, пройдя 10 км. Какова скорость течения реки, если катер шел быстрее плота на 12 км/ч?

б) Две бригады ателье получили заказ на изготовление мужских костюмов. За 4 дня их совместной работы было выполнено $\dfrac{2}{3}$ заказа. За сколько дней можно было бы выполнить заказ каждой бригадой, если первая бригада могла выполнить его на 5 дней быстрее, чем вторая?

437 Решите уравнения:

а) $\dfrac{12}{x-\dfrac{6}{x}-1}-\dfrac{12}{x-\dfrac{6}{x}+1}=1$; б) $3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=24$; в) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-5\dfrac{x^2+2}{x}+6=0$.

438 Решите неравенства:

а) $(x-1)^2(x-2)^3\geqslant 0$;

б) $x^2-17x+60>0$;

в) $\dfrac{(x-9)(x+4)}{(x+5)^2(x-1)^7}\leqslant 0$;

г) $\dfrac{x^2-25}{x^2-x-6}<0$.

439 Докажите неравенство $(a+8)(a+6)<(a+7)^2$.

440 Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{x^4+2x^2+16}{x^2}$.

Д **441** Бросают игральный кубик, у которого одна грань окрашена в красный цвет, а остальные в синий. Являются ли исходы испытания: «выпала красная грань», «выпала синяя грань» равновозможными? Что надо изменить в кубике, чтобы эти исходы стали равновозможными? Придумайте свой пример равновозможных событий.

442 Определите, какие из приведенных событий A и B являются совместными, а какие – несовместными.

а) Брошены две игральные кости: A = «сумма выпавших очков равна 6», B = «на одной из костей выпало 2 очка».

б) Брошены две игральные кости: A = «сумма выпавших очков равна 6», B = «на одной из костей выпало 6 очков».

в) На контрольной по математике: A = «ученики 8 «А» класса получили 10 пятерок», B = «ученики 8 «Б» класса получили 9 пятерок».

г) На контрольной по математике: A = «ученики 8 «А» класса получили 10 пятерок», B = «ученики 8 «А» и 8 «Б» классов вместе получили 9 пятерок».

443 В группе 5 девушек и 11 юношей. По жребию разыгрывается билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

444 На экзамене по биологии 33 билета. Ко дню сдачи экзамена Вася успел выучить только 21 билет. Вычислите вероятность того, что взяв экзаменационный билет наугад, Вася выберет билет, который он успел выучить.

445 Из 90 велосипедов, привезенных на склад магазина, 12 имеют дефекты различного рода. Вычислите вероятность того, что случайно выбранный для витрины велосипед окажется без дефектов.

446 Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность того, что:

а) на верхних гранях этих кубиков выпало в сумме десять очков;

б) сумма очков на выпавших гранях четная и хотя бы на одном из кубиков выпало 3 очка;

в) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 7;

г) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 8 и не больше 10;

д) сумма выпавших на верхних гранях очков равна шести, а модуль их разности равен четырем;

е) сумма выпавших на верхних гранях очков равна пяти, а их произведение равно шести.

447 На карточках написаны целые числа от 1 до 200. Карточки перемешали, а затем, не глядя, вытащили одну из них. Вычислите вероятность того, что число на вытащенной карточке:

а) делится на 7; б) делится на 4 и на 5.

448 Известно, что Света родилась в декабре. Найдите вероятность того, что день ее рождения приходится а) на 31-е число; б) на число, кратное 3; в) на число, содержащее цифру 3.

449 Двое бросают монету. Один бросил ее 13 раз, второй –12 раз. Чему равна вероятность того, что у первого монета упала решкой большее число раз, чем у второго?

Экспресс-тест № 9

450 Решите уравнения:

а) $\frac{2x-5}{x+5}=\frac{3x+21}{2x-1}$; б) $\frac{x-14}{x^3-8}=\frac{5}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x-2}$; в) $x^2+3x=\frac{8}{x^2+3x-2}$.

451 Расстояние между двумя пристанями по реке – 40 км. Катер проходит этот путь туда и обратно за 4 ч 10 мин. Определите собственную скорость катера, если скорость течения равна 4 км/ч.

452 Решите неравенства:

а) $x(x^2-16)<0$; в) $\frac{15x^2+3x}{3x-1}\geqslant 0$;

б) $x^2-7x+16<0$; г) $\frac{-x^2-2x+24}{x^2-12x+35}>0$.

C **453*** Ваня и Вася живут в одном подъезде. Ваня живет на 6-м этаже. Выходя от Вани, Вася пошел не вниз, как ему было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Вася понял свою ошибку и пошел вниз на свой этаж. Оказалось, что Вася прошел в полтора раза больше, чем если бы он сразу пошел вниз. Сколько этажей в доме?

454* В самолете 100 мест. При посадке в самолет выстроилась очередь из 100 пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из этих мест. Первой в очереди стоит старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

Экспресс-тест № 9

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Между городами B и A имеется несколько дорог, между городами A и C тоже, а между городами B и C дорог нет. Сколькими способами можно добраться из города B в город C, если между городами B и A имеется 3 дороги, а между городами A и C – две дороги?

А) 9 способов; Б) 5 способов; В) 6 способов.

№ 2

№ 2. На школьном празднике собрались 45 юношей и 30 девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

А) 75 способов; В) 1350 способов;

Б) 30 способов; Г) 675 способов.

№ 3

№ 3. Сколькими способами можно подарить по фотографии трем своим друзьям из имеющихся пяти различных фотографий?

А) 12; Б) 24; В) 48; Г) 60.

№ 4

№ 4. Сколько различных пятизначных паролей из цифр 0 и 1 и букв M, N, S можно составить, если и цифры, и буквы в пароле могут повторяться?

А) 120; Б) 3125; В) 600; Г) 20.

№ 5

№ 5. В течение года учитель проводил учет количества учащихся, написавших контрольную работу по алгебре на «4» и «5». В итоге им получены следующие данные:

№ контрольной работы	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
количество учащихся	18	20	20	19	21	20	22

Найдите дисперсию этого набора.

А) $\frac{6}{7}$; Б) 20; В) 4; Г) $1\frac{3}{7}$.

Часть В

№ 6		
1	2	3

№ 6. Игральный кубик подбросили 150 раз. При этом число 1 выпало 23 раза, число 2 – 25 раз, число 3 – 29 раз, число 4 – 24 раза, число 5 – 23 раза, число 6 – 26 раз. Используя калькулятор, вычислите (с точностью до сотых) частоту наступления следующих случайных событий:

1) выпадение числа 4;
2) выпадение числа 5;
3) выпадение числа 2.

Установите соответствие между выпадением указанного числа очков и частотами наступления этого события.

А) 0,18; Б) 0,17; В) 0,16; Г) 0,15.

№ 7			
1	2	3	4

№ 7. В ящике находятся 2 белых, 3 красных и 1 черный шар. Наугад вынимается один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар:
1) белый; 2) красный; 3) не зеленый; 4) черный или красный.

А) 1; Б) $\frac{2}{3}$; В) $\frac{1}{3}$; Г) $\frac{1}{2}$.

Часть С

(ход решения и ответ записываются на отдельном листе)

№ 8. При бросании двух игральных костей сумма выпавших очков может принимать значения от 2 до 12. Выпадение какой суммы имеет вероятность, равную $\frac{1}{9}$ (составьте таблицу возможных исходов испытания)?

№ 9. На полке стоит 5 книг, две из них одного автора. Сколькими различными способами можно расставить эти книги, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6			№ 7			
					1	2	3	1	2	3	4
В	*В*	*Г*	*Б*	*Г*	*В*	*Г*	*Б*	*В*	*Г*	*А*	*Б*

№ 8

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$p(A) = \frac{1}{36}$ – вероятность суммы, равной 2 или12;

$p(A) = \frac{1}{18}$ – вероятность суммы, равной 3 или 11;

$p(A) = \frac{1}{12}$ – вероятность суммы, равной 4 или 10;

$p(A) = \frac{1}{9}$ – вероятность суммы, равной 5 или 9;

$p(A) = \frac{5}{36}$ – вероятность суммы, равной 6 или 8;

$p(A) = \frac{1}{6}$ – вероятность суммы, равной 7.

Ответ: выпадение сумм в 5 или 9 очков имеет вероятность, равную $\frac{1}{9}$.

№ 9

При перестановке будем считать книги одного автора «склеенными», тогда их можно рассматривать как один элемент. Тогда число перестановок четырех элементов равно $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

При этом две книги одного автора можно переставить между собой $2! = 2$ раза. Поэтому общее число перестановок равно $24 \cdot 2 = 48$ (по правилу произведения).

Ответ: 48 способов.

Шкала успешности:

11–13 баллов – *отлично;*
8–10 баллов – *хорошо;*
5–7 баллов – *удовлетворительно.*

Задачи для самоконтроля к Главе 6

455 а) Флаг составлен из четырех одинаковых горизонтальных полос красного, белого, синего и желтого цветов. Сколько различных флагов удовлетворяют этому условию?

б) Сколько различных пятизначных чисел, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 9?

456 а) В магазине продается 7 моделей пиджаков и 3 модели юбок для школы. Сколько вариантов костюма для школы можно купить в этом магазине?

б) Сколько различных шестизначных паролей из букв П, А, Р, О, Л, Ь можно составить, если буквы в пароле не должны повторяться?

457 В меню столовой предлагается 6 основных блюд, 5 закусок и 7 напитков. Сколько вариантов обеда из основного блюда, закуски и напитка можно приобрести в этой столовой? Сколькими способами можно перекусить в этой столовой, приобретя только закуску и напиток?

458 а) Сколькими способами можно разместить на одной полке пять дисков с кинокомедиями и три диска с фильмами в стиле фэнтези, так чтобы все диски с кинокомедиями стояли рядом?

б) Сколько пятизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в искомом числе могут повторяться?

459 Сколько можно получить «слов» путем перестановки букв в слове «ФУНКЦИЯ» (под «словом» считать все слова, полученные при перестановке, даже не имеющие смысла).

460 а) Учащиеся первого класса изучают 6 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы в этот день было 6 различных уроков?

б) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8, 9, если цифры не могут повторяться?

461 а) Сколько четырехзначных паролей для входа на сайт мог составить Андрей, используя буквы из своего имени (буквы в пароле могут повторяться)?

б) Сколько шестизначных паролей мог для входа на сайт мог составить Олег, используя буквы из своего имени (буквы в пароле могут повторяться)?

462 а) Шифр для кодирования экзаменационной работы состоит не более чем из трех цифр и не содержит цифры 0, 1 и 2. Можно ли такими шифрами закодировать 400 работ?

б) Известно, что код для чемодана является последовательностью цифр длиной не более пяти символов. Сколько существует вариантов такого кода?

463 Дан ряд чисел: 2; -1; 2; 3; 2; 4; 2; 2.

а) Найдите частоту, с которой в данном ряду встречается число 2.

б) Вычислите дисперсию набора. Что интересного вы заметили при вычислениях? Как изменится дисперсия набора, если в данный набор добавить еще одну двойку? Почему?

464 а) На экзамене по истории 45 билетов. Соня не успела выучить 5 билетов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Соне попадется билет, который она не успела выучить.

б) В лотерее 1000 билетов без выигрыша и 20 билетов с выигрышем. Чему равна вероятность, купив один билет, выиграть в эту лотерею?

в) Пирог разделили на 15 кусков, в двух из которых находятся сюрпризы. Чему равна вероятность, взяв кусок пирога наугад, получить пирог с сюрпризом?

465 Ученика попросили назвать число от 1 до 300. Какова вероятность того, что он назовет четное число? число, кратное трем? число, кратное пяти?

466 При статистике отдела контроля качества одного из производств из 1000 случайно отобранных деталей 5 деталей оказываются бракованными. В магазин поступили детали, произведенные на этом предприятии, найдите вероятность того, что купленная деталь окажется бракованной. Сколько бракованных деталей можно ожидать среди 100 таких деталей, закупленных магазином на этом предприятии?

Задачи для самоконтроля по курсу 8 класса

467 Определите, какое слово или словосочетание («необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно») надо поставить вместо многоточия, чтобы высказывание стало истинным.

а) Для того чтобы квадратное уравнение имело решение ..., чтобы его дискриминант был больше нуля.

б) Для того чтобы квадратное уравнение не имело корней ..., чтобы его дискриминант был меньше нуля.

468 Заполните таблицу:

Сложное предложение	$x \geqslant 0$	$x \leqslant 1{,}8$	$-7 < x < 0$	$\left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > 2 \end{array}\right.$	$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - y = 0 \end{cases}$
Простые предложения	$x > 0$				
	$x = 0$				
Логическая связка	или				

469 Определите истинность данных высказываний.

A: Обыкновенную дробь $\frac{3}{5}$ можно записать как $0{,}6$.

B: Обыкновенную дробь $\frac{3}{5}$ можно записать как $0{,}5(9)$.

Сформулируйте конъюнкцию и дизъюнкцию этих высказываний. Установите истинность полученных сложных высказываний.

470 У полиции есть пятеро подозреваемых в краже, и вот их показания.

Андреева: Я не брала чужого. Я никогда в жизни ничего не воровала. Это сделал Петров.

Борисов: Я не брал чужого. У меня достаточно своих средств. Сидоров знает, кто это сделал.

Иванов: Я не виноват. Это сделал Петров. С Сидоровым я познакомился только вчера.

Петров: Я не брал чужого. В краже виновен Сидоров. Андреева лжет, утверждая, что это я совершил кражу.

Сидоров: Я ничего не крал. Виноват Борисов. Иванов может поручиться за меня, так как знает меня с рождения.

В ходе расследования выяснилось, что каждый из подозреваемых два раза сказал правду и один раз солгал. Определите, кто совершил кражу.

471 Определите, пересекаются ли графики уравнений, при положительном ответе найди точки пересечения:

а) $-3y + x + 5 = 0$ и $7 - 5y = -2x$;

б) $x + 5 = 3y$ и $x - 3y = -5$;

в) $7 + 2x - 5y = 0$ и $\frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}y + 2 = 0$;

г) $-0{,}5x + 0{,}25y = -4$ и $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{2}{5}y$.

472 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 7x-8=3y \\ 4x+9y=-24 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 4x+\frac{9}{y}=21 \\ \frac{18}{y}+3x=17 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3y+1-\frac{3(x-5y)}{4}=x-\frac{27y+22}{8} \\ x+3-\frac{5x-9y}{6}=3y-\frac{3-5x}{9} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} \frac{5}{2x+y}-5=-\frac{4}{2x-3y} \\ \frac{2}{2x-3y}-5=-\frac{15}{2x+y} \end{cases}$.

473 Решите задачи, составив систему уравнений:

а) В двух шкафах находится 80 книг. Если из первого шкафа переложить во второй 8 книг, то во втором шкафу будет в $1\frac{2}{3}$ раза больше, чем в первом. Сколько книг было в каждом шкафу?

б) Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если цифры этого числа переставить, то получится число, составляющее $\frac{4}{7}$ первоначального. Найдите это двузначное число.

в) Если длину прямоугольного участка уменьшить на 10 м, а ширину увеличить на 10 м, то площадь участка увеличится на 0,05 га; если же длину увеличить на 15 м, а ширину уменьшить на 10 м, то площадь участка увеличится на 0,01 га. Определите площадь земельного участка.

г) За 2 ч катер прошел 25 км по течению реки и 12 км против течения. В другой раз тот же катер за 3 ч прошел 35 км по течению и 20 км против течения. Определите собственную скорость катера и скорость течения реки.

474 Решите:

а) $\begin{cases} 2x \geqslant -3 \\ 2x-1<3 \end{cases}$;

б) $\left[\begin{array}{l} 5x \leqslant -4 \\ x-1>2x \end{array}\right.$;

в) $-1{,}5 < \frac{x-2}{6} < 3$.

475 Найдите целые решения систем неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-4<1{,}5(4x-3)+8 \\ 1+x<1{,}5x+2{,}5 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x-2>-\frac{2x-13}{11} \\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9} \end{cases}$.

476 Решите систему уравнений с модулями: $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|-4y=-4 \end{cases}$.

477 При каких значениях a система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} 3x+ay=5+a \\ x+2{,}5y=4 \end{cases}.$$

478 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x-2y>4 \\ 3x-y\leqslant 6 \end{cases}.$$

479 Постройте график функции: А) $f(x) = -x^2$; Б) $f(x) = -x^3$.

1) Сравните $f(-4)$ и $f(-1{,}5)$; $f(-4)$ и $f(0)$; $f(-78)$ и $f(78)$.

2) Определите, какое минимальное и максимальное значение функции на отрезках: а) $[-3; 3]$; б) $[0; 1{,}5]$; в) $[-1{,}5; 0]$?

3) Укажите, на каких промежутках из области определения функция положительна, отрицательна, равна нулю.

480 В качестве домашнего задания учитель задал восьмиклассникам начертить график линейной функции, степенной функции и прямой пропорциональности. Один из восьмиклассников начертил только один график, но задание оказалось выполненным полностью. График какой функции он начертил? Начертите этот график.

481 Обратная пропорциональность задана формулой $y=\dfrac{16}{x}$.

Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному $-0{,}04$; $-1{,}6$; $0{,}8$; 20; 800; -3200.

Определите, принадлежат ли графику функции точки $A(-4; -4)$; $B(-0{,}2; 80)$; $C(\frac{4}{5}; 20)$; $F(-0{,}08; -200)$.

482 Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что график функции проходит через точку:

а) $M(-4; -0{,}4)$; б) $C(1{,}5; -12)$; в) $L(\frac{11}{12}; 24)$.

483 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=-\dfrac{7}{x} \\ x-y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x} \\ 4x-y=0 \end{cases}$.

484 Докажите, что функция, заданная формулой $y=0{,}2x^6+5x^4$, является четной.

485 Докажите, что функция, заданная формулой $y=\dfrac{5}{x}-1{,}2x^3$, является нечетной.

486 Дана функция: $y=\begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant -2; \\ -\dfrac{2}{x}, \text{ если } -8 < x < -2. \end{cases}$

Как она называется? Найдите $y(-6)$, $y(-4)$, $y(-2)$, $y\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $y(0)$, $y\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

487 Дана кусочно-заданная функция:

$$y=\begin{cases} -\dfrac{4}{x}, \text{ если } 4 < x \leqslant 6; \\ x, \text{ если } 0 < x \leqslant 4; \\ x^3, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } -6 \leqslant x < -2 \end{cases}$$

а) найдите $y(-4)$, $y(-2)$, $y(-0{,}5)$, $y(0)$, $y(1{,}5)$; $y(3)$; $y(5)$; $y(6)$;

б) постройте график функции;

в) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на ее области определения.

488 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{900}$; в) $\left(\sqrt{16}\right)^2$; д) $\sqrt{169}\cdot\sqrt{49}$; ж) $\sqrt{1{,}21}+\sqrt{0{,}16}$;

б) $\sqrt{0{,}81}$; г) $\left(-3\sqrt{3}\right)^2$; е) $\sqrt{0{,}0036}:\sqrt{0{,}09}$; з) $\sqrt{92+\sqrt{64}}$.

489 Упростите:

а) $\sqrt{361\cdot16}$; в) $\sqrt{\dfrac{225}{400}}$; д) $-21\cdot\sqrt{(-4)^2}$;

б) $\sqrt{88}\cdot\sqrt{22}$; г) $\dfrac{\sqrt{448}}{\sqrt{7}}$; е) $2{,}4\cdot\sqrt{5^4}$.

490 Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2-12x+36}$, если $x > 6$; б) $\sqrt{2{,}5x^2-2x+0{,}4}$, если $x < 0{,}4$.

491 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{0{,}6}$; в) $4\sqrt{0{,}5}$; г) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; д) $\dfrac{a}{2c}\sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

492 Освободите дробь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

493 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{12}-2\sqrt{27}+3\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$; в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;

б) $(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$; г) $\left(5-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(6+5\sqrt{3}\right)$.

494 Решите графически уравнения:

а) $2\sqrt{x} = x$; б) $-x^2 = x - 2$; в) $\frac{4}{x} = 1$; г) $-\frac{3}{x} = \frac{x}{3}$.

495 Решите уравнения:

а) $0,5x^2 - 2 = 0$; д) $x^2 + 6x + 8 = 0$; и) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

б) $x^2 + 2x = 0$; е) $x^2 - 10x + 9 = 0$; к) $x^2 - 10x - 11 = 0$;

в) $4x^2 + 1 = 0$; ж) $x^2 + x = 2$; л) $\sqrt{2}x^2 - 10x + 8\sqrt{2} = 0$;

г) $(x - 2)^2 - 9 = 0$; з) $x^2 - \frac{2}{7}x - 47 = 0$; м) $1022x^2 - 1021x + 1 = 0$.

496 При каких значениях x трехчлен $x^2 - 2x + 8$:

1) обращается в нуль;

2) принимает значение, равное 7;

3) принимает значение, равное -10;

4) равен двучлену $(4 - x)$?

497 Решите квадратные уравнения с параметром a:

а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; б) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$.

498 Решите квадратные уравнения с параметрами a и b:

а) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$; б) $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$.

499 Составьте квадратное уравнение по данным его корням:

а) 5 и 2; б) $-0,1$ и 10; в) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$; г) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

500 Решите биквадратные уравнения:

а) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$; в) $20x^4 - x^2 - 1 = 0$;

б) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; г) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

501 Разложите на множители трехчлены:

а) $x^2 + 7x + 10$; д) $2x^2 + 3x - 6,48$;

б) $x^2 + 3x - 108$; е) $30x^2 + 37x + 10$;

в) $x^2 - 17x + 72$; ж) $x^4 - 12x^2 + 32$;

г) $x^2 + 5,9x + 8,5$; з) $6x^4 - 5x^2 + 1$.

502 Решите задачи, составляя уравнение:

а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 1201. Найти эти числа.

б) Чему равен периметр прямоугольника, площадь которого равна 80 см^2, и одна из сторон на 2 см больше другой?

в) Если одну сторону квадрата уменьшить на 2 м, а вторую – на 4 м, то площадь полученного прямоугольника станет равной 120 м^2. Найти сторону квадрата.

503 Найдите значение k так, чтобы уравнение имело два равных: 1) положительных корня; 2) отрицательных корня:

а) $5x^2 + 2kx + 5 = 0$; б) $kx^2 - (k - 7)x + 9 = 0$.

504 При каких значениях коэффициента m уравнение имеет два равных корня:

а) $4x^2 + mx + 9 = 0$; б) $mx^2 + 4x + 1 = 0$.

505 Вычислите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 8x + 7$; б) $y = x^2 + 4x + 3$; в) $y = x^2 - x + 2{,}25$;

506 Постройте график функций:

а) $y = (x + 2)^2 + 3$; б) $y = -(x - 1)^2$.

507 Решите квадратные неравенства:

а) $6x^2 - x - 2 \geqslant 0$; в) $2(x + 2)^2 - 3{,}5 \geqslant 0$;

б) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$; г) $x > \frac{x^2}{2} - 4x + 15$.

508 Найдите значения x, при которых данные выражения имеют смысл:

а) $\sqrt{2-x-x^2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{9x^2-3x-2}}$.

509 Постройте графики функций:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+x, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ -x^2+2x+4, \text{ если } 0<x \leqslant 3 \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x-3, \text{ если } -1<x \leqslant 4; \\ x^2+4x-5, \text{ если } -6<x \leqslant -1 \end{cases}$

510 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-4x-5>0 \\ x^2+2x-3<0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -0{,}5x^2+3x+8 \leqslant 0 \\ \frac{1}{3}x^2+5x+12 \geqslant 0 \end{cases}$.

511 При каких значениях параметра m неравенство $x^2 - mx + 4 \geqslant 0$ не имеет решений?

512 Сократите дроби:

а) $\frac{14b^5+7b^4c}{10bc^3+5c^4}$; в) $\frac{12x^4+27x^3c}{16x^3c+36x^2c^2}$; д) $\frac{39a^2b^3-36ab^4}{65a^3b-60a^2b^2}$;

б) $\frac{7a^3b+7ab^3}{a^4-b^4}$; г) $\frac{(a+1)^3}{a^3-a}$; е) $\frac{x^3+y^3}{2(x+y)^2}$.

513 Выполните действия:

а) $\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; д) $-\frac{14a^2b^3c}{39d^5s^7}\cdot\frac{9d^7s}{35a^4b^5}$;

б) $\frac{2a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{2(a-b)}$; е) $\frac{2a(p^2-q^2)^2}{bp}\cdot\frac{p^3}{(p-q)(p+q)}$;

в) $\dfrac{2a+3x}{2a-3x}-\dfrac{2a-3x}{3x-2a}$;

г) $\dfrac{4a+x}{4a-x}+\dfrac{4a-x}{x-4a}$;

ж) $\dfrac{2x^4-36x^2+162}{3x+6}:\dfrac{x^4y-81y}{6x^2+12x}$;

з) $\dfrac{6m^2-6n^2}{m^2-2mn+n^2}:\dfrac{3m+3n}{2m^3-2n^3}$.

514 Выполните действия:

а) $\left[\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left(-x+\dfrac{ax}{a-x}\right)\right]:\dfrac{a^3-ab^2}{5x^3}$;

б) $\left[\dfrac{a^2+ab}{2b}:\left(a^2-b^2\right)\right]\cdot\left[\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-1\right]$.

515 Решите уравнения:

а) $\dfrac{24}{x}-\dfrac{17-x}{x-1}=1$;

б) $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{4x}{x+5}-3$;

в) $\dfrac{3-2x}{2-x}-\dfrac{3x-2}{2+x}-\dfrac{16x-x^2-17}{x^2-4}=0$;

г) $\dfrac{x}{3x+1}=\dfrac{8x-1}{3x-1}+\dfrac{21x^2+2}{1-9x^2}$.

516 Решите задачи:

а) Двум рабочим было поручено изготовить по 100 одинаковых деталей. Один из них изготовлял на 5 деталей в час больше, чем другой. Сколько часов работал каждый рабочий, если на всю работу было затрачено 9 часов?

б) Два самолета одновременно вылетели из одного города в другой. Первый самолет летел со скоростью на 50 км/ч больше, чем второй, и прилетел к месту назначения на 1 час раньше. Определите скорость каждого самолета, если расстояние между городами 1500 км.

в) Расстояние 105 км пароход проходит по течению на два часа быстрее, чем против течения. Определите скорость течения, если собственная скорость парохода равна 18 км/ч.

г) Дробь, у которой знаменатель на 3 больше числителя, будучи сложена с обратной ей дробью, дает в сумме 2,9. Найти эту дробь.

д) Площади двух участков квадратной формы относятся как 16 : 9. Длина стороны первого участка на 60 м больше длины стороны второго участка. Определите стороны каждого участка.

е) Два автомобиля, работая вместе, могут перевезти груз за 15 часов. Один автомобиль работал на 6 часов меньше, чем второй, и перевез 40% груза, а второй – оставшийся груз. Сколько часов работал каждый автомобиль?

517 Докажите, что значение этого дробно-рационального выражения при допустимых значениях переменных не зависит от a и b:

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}.$$

518 Решите уравнения с помощью замены неизвестного:

а) $\frac{3y-4}{3y+4}+\frac{3y+4}{3y-4}=2$; б) $2x^2+x+\frac{7}{2x^2+x}=8$.

519 Решите уравнения, используя выделение целой части алгебраической дроби:

а) $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{4x-1}{x-1}=6$; б) $\frac{3x+2}{x-3}-9=\frac{5}{x-3}$.

520 Решите неравенство:

а) $x^2-3x+2<0$; в) $x^2+2{,}5x+1\leqslant 0$; д) $7x^2+5x-2>0$;

б) $1{,}5x^2-3{,}5x+2>0$; г) $x^2-x-12\geqslant 0$; е) $-x^2-5x+6\geqslant 0$.

521 Найдите, при каких значениях x выражения имеют смысл:

а) $\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$; б) $\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

522 Решите неравенства:

а) $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$; в) $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$; д) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geqslant 1$;

б) $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$; г) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$; е) $\frac{x^2-x^2+x-1}{x+8}\leqslant 0$.

523 «... я поднялся на капитанский мостик и увидел огромные, как горы, волны и нос корабля, который уверенно их резал. И я спросил себя, почему корабль побеждает волны, хотя их так много, а он один? И понял – причина в том, что у корабля есть цель, а у волн – нет. Если у нас есть цель, мы всегда придем туда, куда хотим». Эти слова принадлежат талантливому писателю, историку, британскому полководцу XX века. Расположив наибольшие целые решения неравенств в порядке убывания, узнайте его имя:

Р	$\frac{(x-5)^2(x-6)}{(x+5)(x+6)^5}<0$	**Ч**	$\frac{x(3-x)}{x+3}\geqslant 0$
Ь	$\frac{x}{-x^2-6x+7}>0$	**И**	$\frac{x^2-4}{9x^2-3x}\leqslant 0$
Е	$x^2-49<0$	**Ч**	$(x-8)(x+1)\leqslant 0$
Л	$x^2(x+3)^3(x+1)\leqslant 0$	**Л**	$4x-2x^2>0$

Какой государственный пост занимал этот человек?

524 Решите двойное неравенство $-1{,}5<\frac{x-2}{x+5}<3$.

525 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+x<12 \\ x^2-x-2>0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x-3|<2 \\ x^2+x>6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x+3>0 \\ |x^2-5x+6| \leqslant 2 \end{cases}$.

526 Решите задачу с помощью неравенства:
В двузначном числе цифра десятков на 3 больше цифры единиц. Найти это число, если известно, что оно больше 35 и меньше 74.

527 Докажите неравенство:

а) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{a^2}{x} \geqslant a+x$, если $a>0$, $x>0$; б) $x^3+y^3 \geqslant xy\,(x+y)$, если $x>0$, $y>0$.

528 В таблице показано, сколько миллионов зрителей посмотрело фильм «Человек-паук» (2002 г.) в кинотеатрах разных стран мира (значения округлены с точностью до целых).

Страна	Количество зрителей, млн чел.	Страна	Количество зрителей, млн чел.
Аргентина	2	Испания	5
Бразилия	9	США	70
Великобритания	6	Франция	2
Германия	5	Япония	5

Используя данные таблицы, ответьте на вопросы:

а) В какой из этих стран фильм посмотрели больше всего зрителей? Дайте возможное объяснение этому факту.

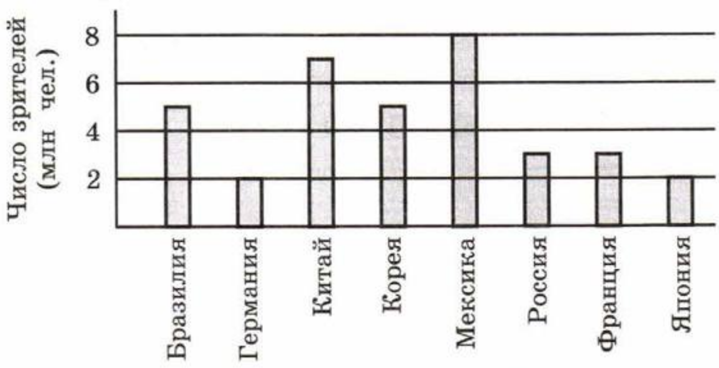
б) Найдите моду этих данных.

в) Найдите размах этих данных.

г) Найдите среднее значение этого ряда данных.

д) Найдите медиану этого ряда данных.

529 Столбчатая диаграмма показывает, сколько миллионов зрителей посмотрели фильм «Новый человек-паук» (2012 г.) в кинотеатрах разных стран мира (значения округлены с точностью до целых).



Используя данные диаграммы, ответьте на вопросы:

1) В какой из этих стран фильм посмотрело больше всего зрителей?

б) Найдите моду этих данных

в) Найдите размах этих данных.

г) Найдите среднее значение этого ряда данных.

д) Найдите медиану этого ряда данных.

530 Пользуясь информацией двух предыдущих заданий, ответьте на вопросы:

а) По каким странам можно провести сравнительный анализ данных за 2002 и за 2012 годы? Занесите эти данные в таблицу. Выясните, какой фильм вызвал больший интерес в каждой из них.

б) Выпишите числовые наборы данных кинопроката за 2002 и за 2012 годы. Дисперсия какого набора будет больше? Можно ли ответить на этот вопрос без вычислений?

531 В Олином пенале лежат цветной и простой карандаши, линейка и три шариковых ручки разного цвета. Оля выложила их в ряд и начала раскладывать в разном порядке. Сколько различных вариантов расположения этих предметов могло получиться у Оли?

532 а) В фирме такси в данный момент свободно 20 машин, среди которых 12 иномарок. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет машина отечественного производства.

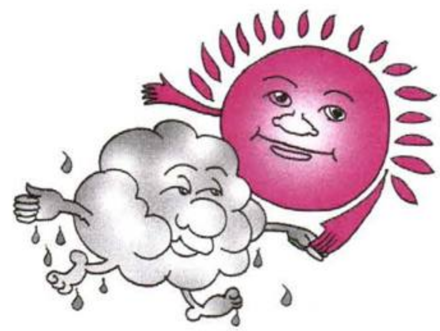
б) В сборнике экзаменационных билетов по геометрии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос об окружности. На экзамене школьнику достается один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса об окружности.

533 Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет

а) четное число;

б) число, кратное трем;

в) число, кратное пяти?



534 За лето в Санкт-Петербурге было 69 пасмурных дней. Чему равна частота пасмурных дней, солнечных дней?

535 В таблице представлены результаты стрелков, показанные ими на тренировке. Кого из стрелков вы бы порекомендовали для участия в соревнованиях?

Стрелок	Число выстрелов	Число попаданий
Зоркин	60	39
Прицелкин	30	21
Промашкин	40	31

536 По статистическим данным, полученным от электролампового завода A, на каждые 1000 лампочек приходится 4 бракованные. По статистическим данным, полученным от электролампового завода B, на каждые 300 лампочек приходится 1 бракованная. Чему равны вероятности покупки исправной лампочки каждого из этих производителей? Лампочки какого завода вы бы приобрели? Поясните свой ответ.

Итоговый тест

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Решите уравнение $2x^2 + x - 10 = 0$.

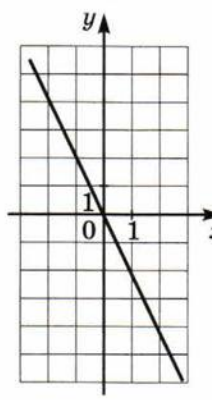
А) $-4; 5$; Б) $4; -5$; В) $-2,5; 2$; Г) $-2; 2,5$.

№ 2			
1	2	3	4

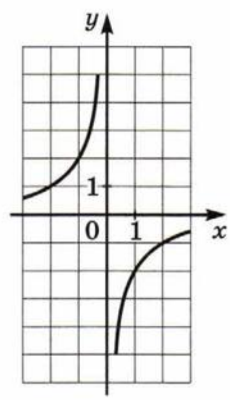
№ 2. Установите соответствие между функцией и графиком:

1) $y = -\dfrac{2}{x}$; 2) $y = -x^2$; 3) $y = -2x$; 4) $y = \sqrt{x}$.

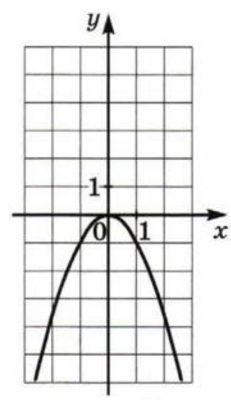
А)



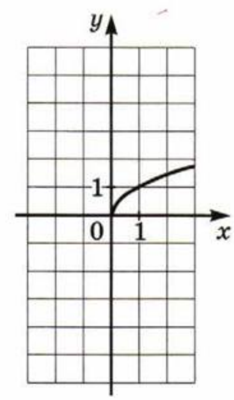
Б)



В)



Г)



№ 3

№ 3. Упростите выражение: $\dfrac{6d-36}{d^2-6d+9} : \dfrac{36-d^2}{d-3}$.

А) $\dfrac{6}{(3-d)(d+6)}$; В) $-\dfrac{6(d-6)^2(d+6)}{(d-3)^3}$;

Б) $\dfrac{6(d-6)^2(d+6)}{(d-3)^3}$; Г) $\dfrac{6}{(d-3)(d+6)}$.

№ 4

№ 4. Решите уравнение: $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

А) $-1,5; 1$; Б) $-1; 1,5$; В) $1,5$; Г) $-1,5$.

№ 5			
1	2	3	4

№ 5. Установите соответствие между системой неравенств, совокупностью неравенств и двойным неравенством и их решениями:

1) $\begin{cases} x \geqslant 5 \\ 10-5x<0 \end{cases}$; 2) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 5 \\ 10+5x<0 \end{array}\right.$; 3) $1,25 < \dfrac{x+3}{4} \leqslant 2$.

А) $(2; 5]$; Б) $(-\infty; 5]$; В) $[5; +\infty)$.

№ 6

№ 6. Вычислите без калькулятора, используя свойства арифметического квадратного корня: $\dfrac{\sqrt{880}}{\sqrt{0,55}}$.

А) 40; Б) 4; В) 400; Г) $\sqrt{2}$.

№ 7

№ 7. Внесите множитель под знак корня: $-\frac{1}{4}\sqrt{32b}$.

А) $-\sqrt{8b}$; Б) $\sqrt{-8b}$; В) $\sqrt{-2b}$; Г) $-\sqrt{2b}$.

№ 8

№ 8. Из 1000 новых карт памяти в среднем 25 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная карта памяти исправна?

А) 0,025; Б) 0, 985; В) 0, 975; Г) 975.

№ 9

№ 9. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать из цифр 3, 5, 7; 8 (цифры в записи числа не повторяются)?

А) 18; Б) 24; В) 12; Г) 6.

Часть В

№ 10

№ 10. Найдите значение выражения $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}-\sqrt{(4-\sqrt{7})^2}$.

А) -1; Б) $2\sqrt{7}-7$; В) $\sqrt{2}-3$; Г) $\sqrt{2\sqrt{7}-7}$.

№ 11

№ 11. При каких значениях переменной a имеет смысл выражение

$$\sqrt{a^2+9a-36}.$$

А) $(-\infty; -3] \cup [12; +\infty)$; Б) $(-\infty; -12] \cup [3; +\infty)$ В) $[-3; 12]$.

№ 12

№ 12. Решите задачу:
«Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{10}$ см. Найдите его площадь, если один из катетов на 2 см меньше второго».
А) 3 см²; Б) треугольник не существует; В) $3{,}5-\sqrt{7}$ см²; Г) 1,5 см².

Часть С

(ход решения и ответ записываются на отдельном листе)

№ 13. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + \sqrt{3}\,x - 2 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^3 + x_2^3$.

№ 14. При каких значениях параметра a уравнение
$x^2 - ax + a(a - 1) - 1 = 0$ имеет два корня?

№ 15. Решите задачу:
Из города в поселок, находящийся на расстоянии 60 км от города, выехал автобус. Через 10 минут навстречу ему выехал легковой автомобиль, скорость которого на 30 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорости автобуса и автомобиля, если известно, что до места встречи каждый из них прошел половину расстояния между городом и поселком.

Шкала успешности:*

18–21 баллов – *отлично*
11–17 баллов – *хорошо*
9–10 баллов – удовлетворительно

** – успешность выполнения итогового теста оценивает учитель.*

2. а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{2n-5}{40}$; в) $\frac{c+10}{2c+d+5}$. **3.** – 2,5; 1; 2,09; $-\frac{4}{7}$. **4.** а) (– ∞; 1) ∪ (1; + ∞); б) (– ∞; 3) ∪ (3; + ∞); в) (– ∞; 0) ∪ (0 ; 1) ∪ (1; + ∞);г) (– ∞; – 1) ∪ (– 1 ; 1) ∪ (1; + ∞); д) (– ∞; 2) ∪ (2 ; 3) ∪ (3; + ∞); е) (– ∞; 3) ∪ ∪ (3; 4) ∪ (4; + ∞). **5.** а) $\frac{9}{24}$; б) $\frac{3ac}{3c^2}$. **6.** а) $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2c}$; $\frac{a-5}{5}$; $\frac{1}{2+d}$; $\frac{1}{(1-3x)^2}$; б) область определения расширилась; не изменилась; расширилась; расширилась; не изменилась. **7** а) $-\frac{5}{n}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{m}$; $-\frac{m^2}{n}$; $\frac{m}{7kn^2}$; б) $\frac{5-c}{c}$; 5 – 3c; 5; – 1; – 1; – 4; в) $\frac{4-a}{b+1}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{1}{b+a}$; $-\frac{1}{b+a}$; $\frac{1}{a-b}$; $\frac{1}{a-b}$; $-(a-b)^2$; г) $\frac{5-y}{5}$; $\frac{5-y}{5+y}$; $\frac{x+4}{x-4}$; $\frac{4-x}{4+x}$. **8.** а) $\frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{x+6y}{x-3y}$. **9.** а) $x - 10$; б) $\frac{1}{x+8}$; в) $\frac{3x-1}{x^2-x+1}$; г) $\frac{x+3}{3x+2}$. **11.** $x - y$. **14.** а) $\frac{3m}{3n}$; $\frac{-m}{-n}$; $\frac{m^2}{mn}$; $\frac{mn}{n^2}$; $\frac{2n^2m}{2n^3}$. б) $\frac{b(a-b)}{ab^2}$; $\frac{ab(a-b)}{a^2b^2}$; $\frac{-a(a-b)}{-a^2b}$; $\frac{5b^2(a-b)}{5ab^3}$. в) $\frac{ab}{a(a+b)}$; $\frac{b^3}{b^2(a+b)}$; $\frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}$; $\frac{b(a+b)}{(a+b)^2}$; $\frac{b(a^2-ab+b^2)}{a^3+b^3}$. **15.** а) $\frac{(2x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; б) $\frac{(x-2y)(x^2-y^2)}{x^4-y^4}$; в) $\frac{(3x+1)(x^2+y^2)(x+y)}{x^4-y^4}$; г) $\frac{(1-3y)(x^2+y^2)(x-y)}{x^4-y^4}$; д) $\frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; е) $\frac{2(x^2+y^2)(x-y)}{x^4-y^4}$. **16.** а) $\frac{6}{3y}$; $\frac{x}{3y}$; б) $\frac{1}{xy}$; $\frac{x^3}{xy}$; в) $\frac{y}{xy}$; $\frac{x}{xy}$; г) $\frac{2y}{x^2y^2}$; $\frac{3x}{x^2y^2}$. **17.** а) $\frac{a}{a(a+b)}$ и $\frac{a+b}{a(a+b)}$; б) $\frac{b(a-b)}{a^2-b^2}$ и $\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a(a+b)}{(a+b)^2}$ и $\frac{b}{(a+b)^2}$; г) $\frac{1}{a-b}$ и $-\frac{a}{a-b}$. **18.** а) $\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$ и $\frac{b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{1}{a+b}$; в) $\frac{(ab-b^2)(a^4+b^4)}{a^4-b^4}$ и $\frac{a-b}{a^4-b^4}$; г) $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$ и $\frac{b}{a^3-b^3}$. **19.** а) $x = 0$; б) $m = 0$; в) $m = 3$; г) $m = \pm 5$; д) $m = 0{,}5$. **20.** 1) а) $\frac{36}{48}$; б) $\frac{20}{48}$; в) $\frac{33}{48}$; г) $\frac{42}{48}$; д) $\frac{11}{48}$. 2) а) $\frac{1}{12}$ и $\frac{10}{12}$; б) $\frac{10}{35}$ и $\frac{21}{35}$; в) $\frac{15}{40}$ и $\frac{26}{40}$; г) $\frac{35}{75}$ и $\frac{18}{75}$. 3) а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{7}$; д) $\frac{5}{7}$. **21.** а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{29}{36}$; в) $\frac{19}{36}$; г) $\frac{9}{44}$; д) $\frac{4}{5}$. **22.** $\frac{5}{6}$ обратное $\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1{,}2$. **23.** а) $\frac{1}{28}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $-\frac{1}{6}$; г) $\frac{2}{25}$; д) $\frac{1}{27}$. **24.** а) 70; б) 0,4. **25.** а) 9; б) 0,25. **26.** а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{11}$. **27.** 2,1. **28.** а) $(4x - 1)(4x + 1)$; б) $9x(1 + 3x)$; в) $(x - 13)(x + 5)$; г) $5(x - 3)(x - 0{,}2)$. **29.** рисунок в). **30.** $b=\frac{8-5x}{y}=1$. **31.** Точки A и B. **32.** а) $y = 2x - 1$; б) $y = -x + 3$. **33.** а) $x = -2{,}5$; б) $y = 3$. **34.** Уравнение 4. **35.** При $a\in[0;12)$. **36.** $-\frac{1}{3}$; 5; 29; $-1\frac{14}{15}$; 0. **37.** а) (– ∞; – 3) ∪ ∪ (– 3; + ∞); б) (– ∞; 31) ∪ (31; + ∞); в) (– ∞; – 1) ∪ (– 1 ; 0) ∪ (0; + ∞); г) (– ∞; – 3) ∪ (– 3 ; 3) ∪ (3; + ∞); д) (– ∞; – 3) ∪ (– 3 ; – 2) ∪ (– 2; + ∞); е) $\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2};\ \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2};+\infty\right)$. **38.** а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{37}{111}$; б) $\frac{a^2}{bc}$ и $\frac{7a^4c}{7a^2bc^2}$. **39.** а) $\frac{(x+y)(x^2-y^2)}{x^4-y^4}$; б) $\frac{(x-2y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; в) $\frac{(x+y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; г) $\frac{(2y-1)(x^2+y^2)(x-y)}{x^4-y^4}$; д) $\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$; е) $\frac{(x-y)^2(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$. **40.** а) $\frac{a-3b}{a+3b}$; б) $\frac{x-3y}{x+2y}$; в) $x + 5$; г) $\frac{2x-5}{2x-1}$. **42.** а) $5x(1 - 17x)$; б) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; в) $(x + 12)(x + 11)$; г) $2(x - 5)(x + 0{,}3)$; **43.** а) $-\frac{27}{28}$; б) $\frac{4}{35}$. **44.** Точка P принадлежит графику. **45.** а) $y = 2 - x$; б) $y = -0{,}5x - 3$; в) $y = 2x$; г) $y = 2$. **48.** $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{21}$; $\frac{7}{a}$; $\frac{11}{15}$; $\frac{b^2+2c}{bc}$ $-\frac{1}{3x}$. **49.** а) $-\frac{1}{a}$; б) $\frac{xz-2x^2}{xy-yz}$. **50.** а) $-\frac{(b-a)^2}{ab}$; б) $\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2-ab+b}{a^2-b^2}$; г) $\frac{a-1}{a+b}$; д) $\frac{a^2b+b^3+1}{(a^2+b^2)(a+b)}$; е) $\frac{a^2-b^2-b}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$. **51.** а) $\frac{2x+6}{(x+6)(x-2)}$; б) $\frac{x-5}{(x-1)(2x+3)}$; в) $\frac{4(1-x)}{(x+4)(x-2)}$. **52.** $x + 4$. **53.** $\frac{10}{81}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{10}{a^2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{c}$. **54.** а) $\frac{a^2-b^2}{ab}$; б) $\frac{a}{a-b}$ в) $\frac{3}{y(x-y)}$; г) $\frac{y(x^2+xy+y^2)}{2x}$; д) $x + 2$; е) $\frac{2(x+2)}{x}$. **55.** а) $\frac{(a-b)^2}{(2a+b)^2}$; б) $\frac{(x-y)^3}{(2x+3y)^3}$. **56.** $\frac{2}{9}$ и $\frac{9}{2}$; $\frac{7+c}{c-8}$ и $\frac{c-8}{7+c}$; $\frac{b}{a}$ и $\frac{a}{b}$. **57.** а) $\frac{5x^2-y}{2x+3y}$; б) $\frac{1}{bc}$;

в) $\left(\dfrac{2x-y}{x+y}\right)^2$. **58.** 0,4; $1\dfrac{5}{9}$; 0,4; $\dfrac{8}{45}$; $\dfrac{b^2}{2c}$. **59.** а) $\dfrac{5a-b}{b-a}$; б) $\dfrac{a}{a-b}$; в) $\dfrac{2x+y}{(y+1)(x+y)}$; г) $\dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ д) $x+2$; е) $x^2(x^2-3)$. **60.** а) $\dfrac{2x-1}{x^2}$; б) $\dfrac{5-a}{9(a+1)}$. **62.** $\dfrac{a^2-ab+ac}{2}$. **64.** а) $(-\infty; -9) \cup (-9; +\infty)$; б) $(-\infty; -9) \cup (-9; 0) \cup$ $\cup (0; 9) \cup (9; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-3; 4) \cup (4; +\infty)$. **65.** а) $\dfrac{3b^3}{13a^3}$; б) $\dfrac{7-m}{2}$; в) $\dfrac{4-d}{4+d}$; г) $\dfrac{y-4}{y+6}$; д) $\dfrac{5}{n+1}$. **66.** а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; б) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **67.** $\dfrac{t(t+5)}{t^2-25}$. **70.** а) $\dfrac{2a-14m}{4am}$ и $\dfrac{m+m^2}{4am}$; б) $\dfrac{2b-2}{2(t-3)}$ и $\dfrac{-b}{2(t-3)}$; в) $\dfrac{5(x-q)}{5x(x-q)(x+q)}$ и $\dfrac{(x+q)^2}{5x(x-q)(x+q)}$; г) $\dfrac{n^3-1}{(1+n)^2(n-1)}$ и $\dfrac{n(n+1)}{(1+n)^2(n-1)}$. **69.** а) $A = -m^8+6m^6-4$; б) $A = 6a^2b^2+3a^2b-ab^2$; в) $A=3$; г) $A = t-5$; д) $A = 10z+25$. **70.** 1 485 – второе неполное делимое, 1 911 – третье неполное делимое; 426 лет. **71.** а) 1; б) 2; в) 0; г) 10; д) 23. **72.** а) $1\dfrac{5}{6}$; б) $7\dfrac{7}{8}$; в) $1\dfrac{20}{73}$; г) $17\dfrac{1}{15}$; д) 50. **73.** а) (2; 0); б) (– 1; 3); в) (– 3; – 3). **74.** г. **75.** б. **76.** (5; 2). **77.** а) $4(b-a)$; б) $\dfrac{3y}{x+z}$. **78.** а) $\dfrac{b^2+a^2}{ab}$; б) $\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$; в) $\dfrac{ab}{(a^2+b^2)(a-b)}$; г) $\dfrac{a(a-2b)}{a^3-b^3}$. **79.** а) $\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}$; б) $\dfrac{b}{a+2b}$; в) $\dfrac{5y}{3x(x+y)}$; г) $\dfrac{y(x^2-xy+y^2)}{2x(x-y)}$. **80.** а) $\dfrac{(a+b)^2}{(3a-b)^2}$; б) $\dfrac{(x+y)^3}{(5x+y)^3}$. **81.** а) $\dfrac{2x+y^2}{x-3y}$; б) $\dfrac{1}{x-y}$; в) $\dfrac{(x+3y)^2}{(x-y)^2}$. **82.** а) $\dfrac{3a+b}{b(b+2a)}$; б) $\dfrac{b^2}{3a+b}$; в) $\dfrac{y}{x(x-y)}$; г) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}$. **83.** x. **84.** a. **85.** а) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -0{,}2) \cup (-0{,}2; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $(-\infty; -4) \cup (-4; 6) \cup (6; +\infty)$. **86.** а) $\dfrac{r^2p^4q}{7s^2}$; б) $\dfrac{8+a}{3}$; в) $\dfrac{m-3}{m+3}$; г) $\dfrac{t+11}{t-2}$; д) $\dfrac{3}{b-1}$. **87.** а) $\dfrac{2d(s-1)}{10sd}$ и $\dfrac{5(5+d)}{10sd}$; б) $\dfrac{-1}{5(2k-1)}$ и $\dfrac{5k}{5(2k-1)}$; в) $\dfrac{18(m+p)}{9m(m-p)(m+p)}$ и $\dfrac{p(m-p)}{9m(m-p)(m+p)}$; г) $\dfrac{a^3-8}{(a-2)^2(a+2)}$ и $\dfrac{a(a-2)}{(a-2)^2(a+2)}$. **88.** а) 2; –5; б) $(0{,}5y+2{,}5; y)$ – y любое число; в) нет решения. **91.** а) 256; б) 456 (ост. 7). **92.** а) $4x^2+4x-3$; б) $6x-3$. **93.** $2x^3+3x^2+4x-3$; 1) x^2+2x+3; 2) $2x-1$; 3) x^2+2x+3. **94.** а) x^3+4x (ост. – 21); б) $6x-5$; в) $x-2$. **95.** а) x^2-x-12; б) x^2-3x-4; в) x^2+4x+3; г) $x+1$; д) $x+3$; е) $x-4$. **96.** 5. **97.** 1). **98.** Правильные дроби: $\dfrac{5}{6};\dfrac{8}{99}$; неправильные дроби: $\dfrac{7}{3};\dfrac{44}{21};\dfrac{16}{2}$. Правильные дроби: $\dfrac{5a}{a^4-1};\dfrac{b-1}{b^2};\dfrac{x-3}{x^2+4};\dfrac{n-4}{(n+4)^2}$; неправильные дроби: $\dfrac{d^8}{8}$. **99.** а) $3x^3+7x^2+3x+\dfrac{5}{x+2}$; б) $x+1+\dfrac{x+1}{x^2-1}$. **100.** а) $3+\dfrac{5}{x-2}$; б) $4x-19+\dfrac{89}{x+5}$; в) $0{,}5y+\dfrac{2y}{2y^2+y-4}$. **101.** а) $\dfrac{2p-2m}{a}$; б) $\dfrac{1}{3b}$; в) $\left(\dfrac{x-y}{xy}\right)^2$; г) $\dfrac{3a+2}{a(a^2-4)}$; **102.** а) $\dfrac{2b}{a}$; б) $\dfrac{7c}{c+5}$; в) $\dfrac{d-q}{3q}$; г) $\dfrac{p-t}{p+t}$. **103.** а) $\dfrac{k^{10}}{s^{15}}$; б) $-\dfrac{64d^3t^9}{h^6}$; в) $\dfrac{8x^{10}}{25a^5y^3}$. **104.** $a-3$. **105.** а) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+2}{x-y}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **106.** а) –11; б) 6. **107.** а) 15; б) 1,1; в) 1,25; г) $\dfrac{2}{3}$. **108.** а) $\left(-\dfrac{3}{14};-\dfrac{5}{7}\right)$; б) (–0,25; 0,875); в) (– 0,5; 0,5); г) (1,25; – 1,5); д) (3; –3); е) (20; 10). **109.** а) $x^2-10x-10$; б) x^2-2x-1; в) x^2+3x-1; г) $x-2$; д) $x-2$; е) $x+3$. **110.** 125. **111.** 88. **112.** $4x+2$. **113.** а) $3+\dfrac{11}{x-3}$; б) $x-3+\dfrac{3x+1}{x^2+x}$. **114.** $d-1$. **115.** а) (0,5; 0,8); б) $\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{3}{7}\right)$. **116.** 6,6. **119.** 1) б) $\dfrac{x}{x-3}$; г) $\dfrac{1}{x^2-9}$; 2) Нет. 3) $x=\pm 3$. 4) $(-\infty; -3) \cup$ $\cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$. **120.** а) $(-\infty; +\infty)$; $(-\infty; 0) \cup (0{:}\ 4) \cup (4; +\infty)$; б) {4}; в) {2}. **122.** 1) а) 5; б) – 10; в) $\varnothing$; г) $\varnothing$; д) при $a=0$, а $b \neq 0$. 2) 5; –10; $\varnothing$; $\varnothing$; 3) {– 5}. **123.** {1}. **125.** а) {– 5; 0}; б) {0}; в) {– 1; 2}; г) {– 6; 2}; д) {3}; е) {– 5}. **126.** а) {0}; б) {– 1,5}. **127.** а) 4 км/ч; б) 50 км/ч. **128.** а) 21 км/ч; б) 7,5 км/ч. **129.** а) 9 дней; б) 9 ч, 18 ч. **130.** 1) $\dfrac{6}{x}-\dfrac{6}{x+3}=1$; 2) $\dfrac{324}{x}-\dfrac{324}{x+18}=1{,}5$; 3) $\dfrac{15}{x}-\dfrac{15}{x+30}=\dfrac{2}{3}$; 15 км/ч и 45 км/ч.

131. 1) $\frac{45}{x}-\frac{45}{x+3}=0{,}5$; 2) $\frac{120}{x}-\frac{120}{x+20}=1$; 3) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+20}=0{,}5$; 40 км, 60 км. **132.** а) $\frac{a^{12}}{b^{16}}$; б) $-\frac{m^6s^{15}}{216a^9}$; в) $-\frac{8n^3}{9b^5}$. **133.** а) m; б) $-\frac{8}{b}$. **134.** а) $3x^2+5x+4$; б) $x^4-5x^3+10x^2-23x+41$ (ост. -80). **135.** а) $x^2-4x+7-\frac{12}{x+2}$; б) $x^4+2x^3+10x^2+50x+253+\frac{1260}{x-5}$. **136.** а) $(\frac{1}{3};-1)$; б) $(-5;-5)$; в) $(1;-1)$. **137.** а) 55 и -65; б) 490 руб.; 1400 руб. **138.** 37,5 г. **139.** а) $\{0; 7\}$; б) $\{0\}$; в) $\left\{-\frac{7}{8};0\right\}$; г) $\{-5; 4\}$; д) $\{-1\}$; е) $\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$.

140. а) $\{1\}$; б) $\{2\}$. **141.** 40 км/ч. **142.** 24 км/ч. **143.** 8 дней. **144.** а) 30 км/ч и 40 км/ч; б) 12 км/ч и 18 км/ч. **145.** а) $-\frac{1}{b}$; б) $-\frac{11}{24p}$; в) $\frac{m^2-n^2}{m^2n^2}$; г) $\frac{x^2-6}{x(x^2-9)}$; д) $\frac{2k^3}{3d}$; е) $\frac{c+1}{cv^3}$; ж) $\frac{z+s}{5s}$; з) $\frac{a-d}{y+r}$; и) $\frac{1}{a-2b}$; к) $-\frac{y+2x}{x+2y}$; л) $\frac{1}{3a}$; м) a^2+1. **146.** $3x^2-8x+23-\frac{50}{x+3}$. **147.** $(-6;-3)$. **148.** а) 17,5 км/ч и 2,5 км/ч; б) 24 и 40 книг. **151.** $\left\{3\frac{5}{6}\right\}$. **152.** а) $\{12\}$; б) $\{-1; 3; 1\}$. **153.** а) $\{-1; 3; \frac{13+\sqrt{181}}{2}; \frac{13-\sqrt{181}}{2}\}$; б) $\{-1; 1; 3\}$.

154. а) $\{-3;\ 3\}$; б) $\{4\}$. **155.** 12 км/ч. **156.** а) $(0{,}5;\ 2{,}5)$; б) $(1;\ 1)$; $\left(-\frac{13}{19};-\frac{21}{19}\right)$; в) $(5;\ 4)$; $(-5;\ 4)$.

157. $(-16;\ 1;\ 13)$. **158.** а $(-6;\ 0)$; б) $(-\infty;\ -8] \cup [-7;\ +\infty)$; в) $\left(1;1\frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty;+\infty)$. **159.** а) $\{-1\}$; б) $\left\{\frac{-3-3\sqrt{5}}{2};\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right\}$. **160.** а) $\{1; 2\}$; б) $\{1; 2; -2; -7\}$. **161.** а) $\{-4; 4\}$; б) $\{2\}$. **162.** 10 км/ч. **163.** а) $(2;1)$; $(-14; -23)$; б) $(3; -3)$; $(-1; 5)$. **164.** а) $[-0{,}5;\ 0{,}5]$; б) $(-\infty; -9) \cup (11; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$. **169.** 1) $(-\infty; 6)$; $(-\infty; -2)$. **171.** в. **173.** а) $(-\infty;-8) \cup (7;+\infty)$; б) $(-2; 3)$; в) $(-\infty;-1] \cup [5;+\infty)$; г) $[-2; 1]$; д) $(0; 5)$; е) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. **174.** а) $(-\infty; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; г) $(-\infty; +\infty)$. **175.** а) $(-2; 1)$; б) $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$; в) $[-2; -0{,}5]$; г) $(-\infty; -0{,}25] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$; д) $(-\infty; \frac{-5-\sqrt{109}}{6}) \cup (\frac{-5+\sqrt{109}}{6}; +\infty)$; е) $\left[\frac{-5-\sqrt{33}}{4}; \frac{-5+\sqrt{33}}{4}\right]$. **176.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$. **177.** а – 4; б – 2; в – 3; г) – 1. **178.** а – 4; б – 1; в – 3; г – 4.

179. а) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (3; +\infty)$; б) $(-5; 3) \cup (3; 7)$; в) $[-10; +\infty)$; г) $(-\infty; -5] \cup \{-2\} \cup \{1\}$. **180.** а) $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$; в) $[-3; 3] \cup \{9\}$. **181.** а) $(-\infty; -2) \cup (-0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$. **182.** а) $(-0{,}5; 0{,}5) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup [3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5}]$. **184.** б) и в). **185.** а) $\left[-\frac{1}{3};0{,}5\right] \cup (1; +\infty)$; б) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (0{,}5; 1)$; в) $\left(-\frac{1}{3};0{,}5\right) \cup [1; +\infty)$; г) $\left(-\frac{1}{3};0{,}5\right) \cup (1; +\infty)$. **186.** а) $(-1; 2) \cup (3; +\infty)$; б) $\{-1\} \cup [2; 3)$; в) $[1; 2] \cup \{3\} \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$; г) $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$. **187.** а) $(-\infty; 2) \cup \{6\} \cup (10; +\infty)$; б) $(-2; -1{,}5) \cup (-1; 1)$. **188.** $(-5; 0{,}5) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **189.** а) $\left[-\frac{2}{3}; 0{,}5\right]$; б) $(0; 1) \cup (3; 4)$. **190.** от 2 до 10 человек. **191.** а) $\{0\}$; б) $\{1; 2; 19+\sqrt{349}; 19-\sqrt{349}\}$; в) $\{-6; -3; 3; 6\}$. **192.** $\{-4\sqrt{10}; 4\sqrt{10}\}$. **193.** а) $\{-3; 0\}$; б) $\{-1{,}25; 5\}$. **194.** а) $y_{наиб}=3$, $y_{наим}=0$; б) $y_{наиб}=-2$, $y_{наим}=-4$; в) $y_{наиб}=4$, $y_{наим}=2$. **197.** а) $(-1{,}2; 2]$, $\{-1; 0; 1; 2\}$; б) $(-0{,}5; 0{,}2)$, $\{0\}$; в) $\varnothing$; г) $(1; 2)$. **198.** а) $[-5; +\infty)$; б) $(-\infty; 3{,}25) \cup [7; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. **199.** а) $(-\infty; -0{,}5]$; б) $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $(-1; 0]$; **200.** а) $[0; 2) \cup (6+\infty)$; б) $(-\infty; -2) \cup [6; 7]$. **201.** 50 000 руб. **203.** а) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(4; 5)$; в) $(-\infty; -0{,}5] \cup [2; +\infty)$; г) $[-3; \frac{1}{3}]$. **204.** а) $(-\infty; -2) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-11; 0) \cup (0; 3)$; в) $[-7; -2] \cup \{3\}$; г) $\{-5\} \cup \{-1\} \cup [7; +\infty)$. **205.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $[-25; 5]$. **206.** а) $(-\infty; -1{,}4) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; 0{,}6] \cup [1; +\infty)$. **207.** а) $(-1; -0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 3]$. **208.** а) $(-5; -4) \cup (-1{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [1; +\infty)$; в) $(-1; 2) \cup \{4\} \cup [7; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (5; +\infty)$. **209.** а) $[-5; 3) \cup [4; 5)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-1{,}5; -1) \cup (2; +\infty)$. **210.** $[-\infty; -2) \cup [1; 2]$.

211. а) $\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; б) $\left\{-3; -\frac{1}{3}; 3; \frac{1}{3}\right\}$. **212.** а) $(-1; 3)$; б) $\{-5\}$. **213.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **214.** 3,65. **217.** а) $(-4; +\infty)$; б) $(-\infty; 3]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. **218.** а) $2 < 5$; б) $-5 < -2$; в) $\sqrt{c} < 2\sqrt{c}$; г) Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $a^2 < a^4$. Если $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, то $a^2 > a^4$ **224.** а) 3; б) 250; в) 0,65; г) $\frac{a+b}{2}$. **228.** а) $(-\infty; -10) \cup (7; +\infty)$; б) $(-3; 1) \cup (5; +\infty)$; в) $[-6; 6]$; г) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$; д) $(-8; 3) \cup (3; 5) \cup (6; +\infty)$; е) $(-\infty; -5] \cup [2; 4]$. **229.** а) $\{-2\} \cup [1; 2]$; б) $(3; 4)$; в) $(-\infty; -6] \cup [-1; 2] \cup \{3\} \cup [8; +\infty)$. **230.** а) $(-2,4; 2,4]$; б) $(-\infty; -4) \cup [-3; -2,5] \cup \left(\frac{1}{3}; 4\right]$; в) $(-\infty; -5] \cup (0; \frac{1}{5}) \cup (8; +\infty)$; г) $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$. **231.** 3 целых решения. **232.** а) $(-\infty; -4] \cup [2\frac{2}{3}; 4]$; б) $(-\infty; -3) \cup \{0,5\} \cup (3; +\infty)$. **233.** $a = 5$. **235.** а) $a = b$; б) $a > b$; в) $a < b$; г) $a < b$; д) $a > b$; е) $a < b$; ж) $a < b$; з) $a > b$. **236.** а) $M \cup N = (-\infty; 8]$; $M \cap N = (-1; 2)$; б) $M \cup N = (-\infty; \sqrt{7}]$; $M \cap N = \{-\sqrt{7}\}$. **237.** а) $[5; 13]$; б) $(3; 4,2)$. **238.** а) $[-3; 2] \cup [6; 7]$; б) $(-\infty; 0)$. **239.** а) $[-6; 7]$; б) $(4; +\infty)$. **240.** 9,4 и 8; 9. **244.** а) $(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$; б) $(-\infty; -0,5) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$; в) $(-\infty; -7) \cup [-0,25; 0] \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$. **245.** а) $[1; 3,5)$; б) $(-7; 2] \cup [4; 7]$. **246.** 10,8 и 10; 11. **251.** а) 6,5 и 6; б) 12,5 и 10; в) 100 и 100; г) 44 и $11\sqrt{15}$. **253** Наименьшее значение 65 (при $x = \pm\sqrt{5}$). **254.** Наибольшее значение $\frac{1}{19}$ (при $x = 3$). **260.** а) 15 и 12; б) 20 и 16; в) 25 и 15; г) 277,5 и 222. **261.** 8 при $x = \sqrt{2}$. **262.** $\frac{1}{3}$ при $x = 1$. **267.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **268.** а) $\frac{5a^3}{9}$; б) $\frac{3}{m-3}$; в) $\frac{n-6}{2n}$; г) $\frac{1}{t-2}$. **269.** а) $\frac{11}{42}$; б) $-\frac{43}{x^2-9}$; в) $-\frac{15}{v-4}$; **270.** а) $\frac{6}{p^4}$; б) $\frac{q+s}{5}$; в) $p^4(p+3)$; г) $\frac{3b+2a}{2}$; д) $y^2 - 4y + 16$; е) $\frac{z}{2(z-3)}$. **271.** $4\sqrt{5}$. **272.** а) $\{-5; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 7\}$; б) $\{-10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6\}$. **273.** а) $\{0; 7\}$; б) $\left\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$; в) $\{1\}$. **274.** а) $\{0\}$; б) -1. **275.** $\{-3; 12\}$. **276.** а) 13 км/ч; б) 10 км/ч; в) 3 км/ч; г) 15 ч; д) 40 км/ч. **277.** $\{-2 - \sqrt{3}; -5; -2 + \sqrt{7}; 1\}$. **278.** а) $\{4; 5\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 7\right\}$. **279.** а) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; б) $[-4; 0]$; в) $(4; 8)$; г) $[-0,5; 0]$; д) $(-\infty; 3] \cup [9; +\infty)$; е) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **280.** $(8; 12)$. **281.** $[0; 8]$. **282.** а) $(-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (7; +\infty)$; б) $(-\infty; -1] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$. **283.** а) $(-9; 0) \cup \{1\} \cup [9; +\infty)$; б) $(-\infty; -8] \cup (0; 6) \cup (6; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$. **284.** а) $[1,5; 2)$; б) $(2,5; 3]$. **286.** 24 при $x = 2$. **287.** а) 2; б) 6; в) 24. **288.** 11. **291.** 1) 8; 2) 12; 3) 60. **292.** 15. **293.** 12. **295.** а) 120; б) 36. **296.** а) 24; б) 14. **297.** 21. **298.** 11. **299.** а) 8; б) 144; в) 96. **300.** а) 6720; б) 360; в) 64. **302.** 12. **303.** $20\sqrt{2} + 30$. **304.** а) $[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (0; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **305.** а) 2; б) $\{-1; 0; 1\}$; в) $\varnothing$. **307.** а) 40; б) 24. **308.** а) 42; б) 12; в) 720. **309.** 3. **310.** а) 4; б) 4320; в) 18. **311.** 625. **312.** 20. **313.** $\{-7; 1\}$; б) $\{-2; -3\}$; в) $\{-2; 0,5\}$. **317.** 1) а) 35; б) 12; **318.** 210. **319.** 100. **320.** 600. **321.** 1) 350. **322.** а) 120; б) 3125. **323.** 75. **324.** 30 576. **325.** 256; 65 536. **326.** а) 8; б) 1024. **327.** а) 16; б) 512. **328.** 43. **329.** 155. **330.** 6 227 020 802. **331.** а) 3136; б) 3584; в) 3696. **332.** а) 15 625; б) 12 500; в) 427 608; г) 180 000; д) 900. **333.** 45 936. **334.** 6; **335.** а) четная; б) ни четная, ни нечетная; в) нечетная; г) четная. **336.** а) $-0,25$; $-a^2$; $-a + 6a - 9$; б) 27; a^3; $-0,1a^6$; в) не существует; $-\frac{125}{a^3}$; a^9; г) не существует; 0; -9; $-|a-1|$. **337.** а) $(3; 4); (-2; -6)$; б) $(-1; 4); (-5; 8)$; в) $(1; -1); (0,25; -0,5)$. **338.** а) 0,12; б) 0,1; в) $4 + 2\sqrt{6}$; г) $\sqrt{7} + 2$; д) $\sqrt{10}$; е) $\sqrt{2}$; ж) 2; з) 19; и) 17; к) 0,001; л) $-\sqrt{6}$; м) 6,3. **339.** 552. **340.** а) 24; б) 256. **341.** 64. **342.** 720. **343.** а) 216; б) 3 637 248. **344.** а) $(1; 6)$;

(3; 2); б) (2; 0). **345.** $\sqrt{1\frac{17}{64}};\sqrt{1\frac{7}{9}};\frac{\pi}{2};\sqrt{9};2\sqrt{6};6\sqrt{2}$. **349.** а) 40; б) 24. **350.** 1) а) 6; б) 720; в) 120. **351.** а) 6; б) 24; в) 120; г) 720; д) 30; е) 27; ж) 2880; з) 480. **352.** 24. **353.** 3 628 800. **354.** 720. **355.** а) 5040; б) 720; в) 360. **357.** а) –5; б) $\sqrt{13}-1$; в) $3-2\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{3}-3$; д) 1; е) 25; ж) 2,2; з) 3. **358.** а) $[0,5; 3) \cup (5; +\infty)$; б) $(-7; 8)$; в) $(-\infty; 1]$. **359.** 1) 720; 214; 2) 704; 204; 3) 254; 186. **360.** а) $\{9\}$; б) $\{0; 6\}$; в) $\{-11\}$; г) $\{0, -9\}$. **361.** а) 6; б) 6. **363.** 87 178 291 200. **364.** а) –14; б) $5-\sqrt{17}$; в) 7,75; г) 6. **365.** а) $\{5\}$; б) $\{0; 4\}$. **368.** 1) 17,7; 21,7 и 15,3; 6,4 и 15,3. **369.** 2) а) 15; 15; б) 30; 30. **370.** а) –20, –10, 0, 10, 20; б) –1; 0; 0; 1; 0; 0; в) 4; –9; –5; –4; –4; 8; 10. **371.** а) $12\frac{1}{6}; 6\frac{2}{9}$; б) $20\frac{1}{3}; 1\frac{5}{9}$. **372.** а) 22 и 22; б) 18 и 18. **373.** 20 600; 10 000; 7000. **374.** а) $\{2; 6\}$; б) $\{5; 6\}$; в) $\{-3; 2\}$. **375.** $x^2-10x-56=0$; **376.** а) 4,25; б) 6,25. **377.** $x_2=\sqrt{5}-3$; $c=8-4\sqrt{5}$. **378.** $(x-12)\cdot(x-5)$; б) $(3x-2)(1-2x)$; в) $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$; г) нельзя. **379.** а) 4 см и 10 см; б) катеты 4,5 см и 6 см, гипотенуза 7,5. **380.** $(16; +\infty)$; **381.** 2; $-\frac{2}{3}$. **382.** $\left(-\infty;-1\frac{1}{9}\right)\cup(2;+\infty)$. **383.** 1) а, в; 2) а, б, в, г, е; 3) г; 4) а, б, в; 5) а, б, в, д; 6) а. **385.** а) 110; б) 1080; г) 125. **386.** а) нет; 30; 40; б) 2; 2,5; 6; в) 16; 16; 19. **387.** 162 000; 120 000; 120 000. **388.** а) $\{-10; -2\}$; б) $\{-2; 6\}$; в) $\varnothing$. **389.** 25. **390.** а) $(x-6)(x+8)$; б) $(x+1)(41-7x)$; в) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$; г) нельзя. **391.** 10; 9. **392.** $(-\infty;-9)$. **395.** 1) 4; 3; 5; 2) 0,25; 1. **396.** Истинно, ложно, истинно, истинно, ложно. **397.** а) 0,2; б) 0,13; в) 0,15; г) 0,19; д) 0,17; е) 0,16. **399.** а) 300; 111; б) 85; 165. **400.** 0,118; 0,108; 0,067; 0,017. **402.** а) $(-\infty;-5]\cup[0;+\infty)$; б) $\left(-\infty;-3\sqrt{3}\right]\cup\left[3\sqrt{3};+\infty\right)$; в) $(-\infty;-7]\cup[-6;+\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) нет таких действительных значений x, при которых выражение имеет смысл; е) $2\frac{1}{3}$. **403.** $a\in(-4;4)$. **404.** $a\in(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$. **405.** а) $\frac{a-6}{a+6}$; б) $\frac{3-t}{9+3t+t^2}$; в) $\frac{d-8}{d-7}$; г) $\frac{c+5}{c-8}$. **406.** а) $\frac{8m}{15(d-3)}$; б) $\frac{25k^2}{n(n^2-25k^2)}$; в) $\frac{b+1}{b^2+b+1}$. **407.** –1. **408.** а) $\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}{m-n}$; б) m. **409.** при $k \in T$, $T=\{-3; -1; 0; 2; 3; 5\}$. **411.** а) 500; б) 171. **413.** а) $[1; 1,5]$; б) $[-9; 9]$; в) 3; г) нет решений. **414.** при $a \in (-5; 3)$. **415.** а) $\frac{b+7}{b-7}$; б) $\frac{a^2+5a+25}{a-5}$; в) $\frac{k-8}{k-9}$; г) $\frac{m-5}{m-3}$. **416.** а) –1; б) $-d$. **419.** 1) Случайное; 2) Достоверное; 3) Невозможное; 4) Невозможное; 5) Достоверное; 6) Случайное. **420.** 1) и 2). **421.** 1) «Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 10 баллов» – «Восьмиклассница Оля получила за итоговый тест по алгебре 10 баллов»; 2) Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 1 балл» – «Восьмиклассница Оля получила за итоговый тест по алгебре 10 баллов» – совместные события. 3) «Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 10 баллов» – Восьмиклассник Коля получил за итоговый тест по алгебре 1 балл» – несовместные события. **423.** 1) 0,5. **424.** $\frac{1}{3}$ **425.** 1) а) 0,4; б) 0,6; 2) а) $\frac{6}{11}$ б) $\frac{5}{11}$. **427.** 1) 0,5; 2) 0,125; 3) 0,375; 4) 0; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,875; 8) 0,625. **428.** 0,04. **429.** а) 0,05; б) 0,175. **430.** а) 0; б) $\frac{1}{30}$ в) 0,4 г) $\frac{17}{30}$ **431.** а) 0; б) $\frac{1}{216}$ в) 1; г) 0; д) $\frac{1}{72}$; е) $\frac{7}{216}$ **432.** 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 0,2; 5) 0; 6) 0,4; 7) 0. **433.** 0,5. **435.** $a=-12, a=2$. **436.** а) 3 км/ч; б) 10 дней и 15 дней. **437.** а) $\pm1; \pm6$; б) $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 3; $\frac{1}{3}$; в) 1; 2. **438.** а) $\{1\}\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;5)\cup(12;+\infty)$; в) $(-\infty;-5)\cup(-5;-4]\cup(1;9]$; г) $(-5;-2)\cup(3;5)$; **440.** 10 при $x=-2$, $x=2$; **441.** Нет; 3 красных и 3 синих. **442.** 1) совместные; 2) несовместные; 3) совместные; 4) несовместные. **443.** $\frac{5}{16}$; **444.** $\frac{7}{11}$; **445.** $\frac{13}{15}$. **446.** а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{5}{36}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{18}$; е) $\frac{1}{18}$. **447.** а) $\frac{7}{50}$; б) $\frac{1}{20}$. **448.** а) $\frac{1}{31}$; б) $\frac{10}{31}$; в) $\frac{1}{11}$. **449.** 0,5. **450.** а) –2; 50; б) 0; в) –4; –2; –1; 1. **451.** 20 км/ч. **452.** а) $(-\infty; -4) \cup (0; 4)$; б) $\varnothing$; в) $[-0,2;0]\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; г) $(-6; 4) \cup (5; 7)$. **455.** а) 24; б) 120. **456.** а) 21; б) 720. **457.** 210; 35. **458.** а) 2880;

б) 625. **459.** 5040. **460.** а) 720; б) 120; **461.** а) 6^4; б) 4^6. **462.** б) 11 110. **463.** а) 0,625; б) 2,25. Не изменится. **464.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{51}$ в) $\frac{2}{15}$. **465.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$. **466.** $\frac{1}{200}$; 1. **467.** а) достаточно; б) необходимо и достаточно. **470.** Борисов. **471.** а) (4; 3); б) $(-\infty; +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $(8\frac{2}{3}; 7\frac{1}{3})$. **472.** а) $(-2\frac{2}{3}; 0)$; б) (5; 9); в) $(6; \frac{2}{3})$; г) (2; 1). **473.** а) 48 и 32 книги; б) 84; в) 39 100 м²; г) $v_{\text{соб.}}$ = 18 км/ч; $v_{\text{т.}}$ = 2 км/ч. **474.** а) $[-1,5; 2)$; б) $(-\infty; -0,8]$; в) $(-7; 20)$. **475.** а) $(-2,5; +\infty)$; б) $(1; 4\frac{8}{9})$. **476.** (3; 2); (−5; 2). **477.** $(-\infty; 7,5)\cup(7,5; +\infty)$. **481.** −400; −10; 20; 0,8; 0,02; −0,005; принадлежат точки A, C, F. **482** а) $y = \frac{1,6}{x}$; б) $y = -\frac{18}{x}$; в) $y = \frac{22}{x}$. **483.** а) (1; −7); (7; −1); б) (1; 4); (−1; −4). **486.** $\frac{1}{3}$; 0,5; 4; $\frac{1}{9}$; 0; $\frac{1}{16}$. **487.** а) −0,25; −8; −0,125; 0; 1,5; 3; −0,8; $-\frac{2}{3}$ в) $y_{наиб.} = 4$; $y_{наим.} = -8$. **488.** а) 30; б) 0,9; в) 16; г) 27; д) 91; е) 0,2; ж) 1,5; з) 10. **489.** а) 76; б) 44; в) 0,75; г) 8; д) − 84; е) 60. **490.** а) $x - 6$; б) $(0,4 - x)\sqrt{2,5}$. **491.** а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{8}$; г) $\sqrt{ab}$; д) $\sqrt{\frac{a}{4c}}$. **492.** а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$; в) $2-\sqrt{3}$; г) $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4}$. **493.** а) 33; б) 7; в) 1; г) $13\sqrt{3}$. **494.** а) {0; 4}; б) {−2; 1}; в) {4}; г) $\varnothing$. **495.** а) {−2; 2}; б) {−2; 0}; в) $\varnothing$; г) {−1; 5}; д) {−4; −2}; е) {−9; 1}; ж) {−2; 1}; з) $\{-6\frac{5}{7}; 7\}$; и) {1; 0,2}; к) {− 1; 11}; л) $\{\sqrt{2}; 4\sqrt{2}\}$; м) $\{-1; \frac{1}{1022}\}$. **496.** 1) $\varnothing$; 2) − 1; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$. **497.** а) $\left\{\frac{3a+a\sqrt{7}}{2}; \frac{3a-a\sqrt{7}}{2}\right\}$; б) $\left\{\frac{a+a\sqrt{5}}{2}; \frac{a-a\sqrt{5}}{2}\right\}$. **498.** $\{a+|b|; a-|b|\}$; б) $\{2a; 2b\}$. **500.** а) $\left\{-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right\}$; б) {−2 ; 2}; в) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$; г) {− 1; 1}. **501.** а) $(x + 5)(x - 5)$; б) $(x + 12)(x - 9)$; в) $(x - 9)(x - 8)$; г) $(x + 3,4)\cdot(x + 2,5)$; д) $2(x + 1,2)(x - 2,7)$; е) $(6x + 5)(5x + 2)$; ж) $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$; з) $(\sqrt{2}x - 1)\cdot(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$. **502.** а) 24 и 25; б) 36 см; в) 14 м. **503.** а) 1) − 5; 2) 5; б) 1) 49; 2) 1. **505.** а) (4; − 9); б) (− 2; − 1); в) (0,5; 2). **507.** а) $(-\infty; -0,5] \cup [\frac{2}{3} +\infty)$; б) $(-6; -3)$; в) $(-\infty; -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}; +\infty)$; г) $\varnothing$. **508.** а) $[-2; 1]$; б) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$. **510.** а) $(-3; -1)$; б) $(-\infty; -12] \cup [-3; -1,5] \cup [3,5; +\infty)$. **511.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **512.** а) $\frac{7b^4}{5c^3}$; б) $\frac{7ab}{a^2-b^2}$; в) $\frac{3x}{4c}$; г) $\frac{a^2-a+1}{a(a-1)}$; д) $\frac{3b}{5a}$; е) $\frac{x^2-xy+y^2}{2(x+y)}$. **513.** а) $\frac{3a^2-2ab+3b^2}{2(a^2-b^2)}$; б) $\frac{3a^2-2ab+b^2}{2(a^2-b^2)}$; в) $\frac{4a}{2a-3x}$; г) $\frac{2x}{4a-x}$; д) $-\frac{6cd^2}{65a^2b^2s^6}$; е) $\frac{2ap^2(p^2-q^2)}{b}$; ж) $\frac{4x(x^2-9)}{y(x^2+9)}$; з) $4(m^2 + mn + n^2)$. **514.** а) $\frac{5x^4}{a(a+b)}$; б) $\frac{a-b}{8b^2}$. **515.** а) {3}; б) $\left\{\frac{5}{7}\right\}$; в) {1}; г) {0,5}. **516.** а) 4ч и 5 ч; б) 250 км/ч и 300 км/ч; в) 3 км/ч; г) $\frac{2}{5}$; д) 180 м и 240 м; е) 12 ч и 18 ч. **518.** а) {0}; б) $\{-1; 0,5; \frac{-1-\sqrt{57}}{2}; \frac{-1+\sqrt{57}}{2}\}$. **519.** а) {4}; б) {4}. **520.** а) (1; 2); б) $(-\infty; 1) \cup (1\frac{1}{3}; +\infty)$; в) $[-2; -0,5]$; г) $(-\infty; -3]\cup[4; +\infty)$; д) $(-\infty; -1) \cup (\frac{2}{7}; +\infty)$; е) $[-6; 1]$. **521.** а) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$. **522.** а) $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$; б) $(-4,5; -2)\cup(3; +\infty)$; в) $(-\infty; \frac{1}{3})\cup(3; 5) \cup (5; +\infty)$; г) $(-1; 5)$; д) $(-\infty; -2)\cup(-1; 0]$; е) $(-8; 1]$. **524.** $(-8,5; -5)$. **525.** а) $(-4; -1)\cup(2; 3)$; б) (2; 5); в) [1; 4]. **526.** 41; 52; 63. **528.** а) США (численность США превышает численность других стран; США является родиной комикса); б) 5; в) 68; г) 13; д) 5. **529.** а) Мексика; б) несколько мод: 2, 3 и 5; в) 6; г) 4,375; д) 4. **531.** 720. **532.** а) 0,4; б) 0, 92. **533.** а) 0,5; б) 0,33; в) 0,2. **534.** 0,75; 0,25. **535.** Промашкин. **536.** $\frac{1}{250} > \frac{1}{300}$; завода А.

Предметный указатель

Оглавление

СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

$(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \boldsymbol{R}$

$(\sqrt{a})^{2n} = a^n$, где $a \geqslant 0$, $n \in \boldsymbol{N}$

$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$, где $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geqslant 0$ и $b > 0$

Если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, где $a > 0$ и $b \geqslant 0$

Если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0$ и $b > 0$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Формулы корней квадратного уравнения
$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

$D = b^2 - 4ac$		
$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Нет корней	$x = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Формулы корней квадратного уравнения с четным коэффициентом $b = 2k$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a},$$

где $D_1 = \dfrac{D}{4} = k^2 - ac$

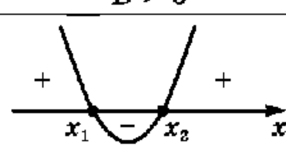
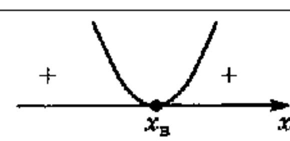
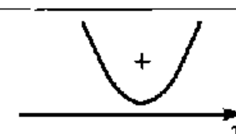
Теорема Виета и обратная к ней теорема

x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = 0$ $\Leftrightarrow$ $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, где x_1, x_2 – корни трехчлена

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Схема / Неравенство где $a > 0$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
			
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geqslant 0$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in (x_1; x_2)$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$
$ax^2 + bx + c \leqslant 0$	$x \in [x_1; x_2]$	$x = x_в$	$x \in \varnothing$

Учебное издание

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

8 класс

В трех частях

Часть 3 (6+)

Художники *П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов*

Подписано в печать 05.04.2017. Формат 84x108/16. Объем 9,0 п. л. Усл. печ. л. 15,12.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 5000 экз. Заказ № м4510.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 1
тел. (495) 181-53-44, e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70. E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru